2.0 Voorkennis

Volgorde bij berekeningen:

1) **Haakjes wegwerken**
2) **Wortels en kwadraten wegwerken**
3) **Vermenigvuldigen en delen van links naar rechts**
4) **Optellen en aftrekken van links naar rechts**

Let op:

$\sqrt{64+36} = \sqrt{(64+36)}$ **Haakjes (Stap 1)**

Voorbeeld :

$$6\sqrt{25} + 3\sqrt{36} =$$

$$6 \cdot \sqrt{25} + 3 \cdot \sqrt{36} =$$

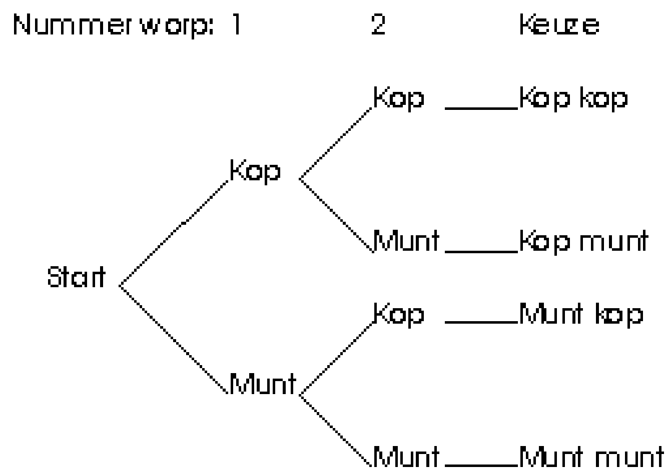
$$6 \cdot 5 + 3 \cdot 6 =$$

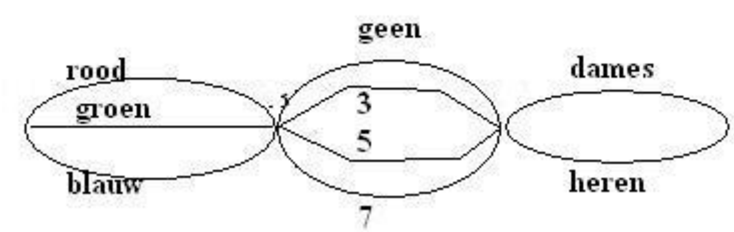
$$30 + 18 = 48$$

2.1 Telproblemen visualiseren [1]

Het aantal mogelijke uitkomsten van een telprobleem kun je op verschillende manieren weergeven:

Boomdiagram:
Een overzicht van de mogelijke antwoorden bij het opgooien van twee muntstukken.

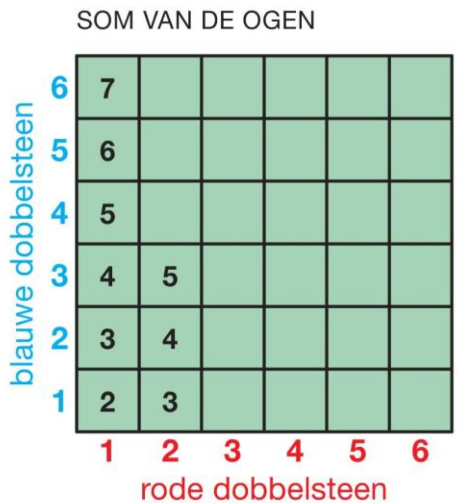




Wegendiagram:
Een overzicht van de mogelijkheden van Fietsen met:
- Een rode, groene of blauwe kleur;
- Geen, 3, 5 of 7 versnellingen;
- Dames- of herenuitvoering.

2.1 Telproblemen visualiseren [1]

Het aantal mogelijke uitkomsten van een telprobleem kun je op verschillende manieren weergeven:



<u>Rooster:</u>
Een overzicht van de mogelijke uitkomsten bij het gooien met twee dobbelstenen en het optellen van de uitkomsten.

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

<u>Systematisch noteren:</u>
Een overzicht van alle mogelijke uitkomsten bij het gooien met twee dobbelstenen met elk vier ogen.

<u>Let op:</u>
Gebruik steeds de notatie die het handigste is.

2.1 Telproblemen visualiseren [2]

Voorbeeld:
In een klas met 32 leerlingen zijn:
- 18 leerlingen lid van een sportvereniging;
- spelen 12 leerlingen muziek;
- zijn 10 leerlingen geen lid van een sport vereniging en spelen geen muziek.

Hoeveel leerlingen zijn lid van een sportvereniging en spelen muziek?

Stap 1:
Maak een kruistabel en vul hier de bekende gegevens in:

		Muziek		
		Wel	Niet	Totaal
Sport	Wel			18
	Niet		10	
	Totaal	12		32

2.1 Telproblemen visualiseren [2]

<u>Stap 2:</u>
Bereken de ontbrekende gegevens:

(1) Het aantal leerlingen dat niet sport is 32 – 18 = 14;
(2) Het aantal leerlingen dat geen muziek maakt is 32 – 12 = 20;
(3) Het aantal leerlingen dat wel sport, maar geen muziek maakt is 20 – 10 = 10;
(4) Het aantal leerlingen dat wel sport en muziek maakt is 18 – 10 = 8;
(5) Het aantal leerlingen dat niet sport, maar wel muziek maakt is 12 – 8 =4.

		Muziek		
Sport		Wel	Niet	Totaal
	Wel	8	10	**18**
	Niet	4	**10**	14
	Totaal	**12**	20	**32**

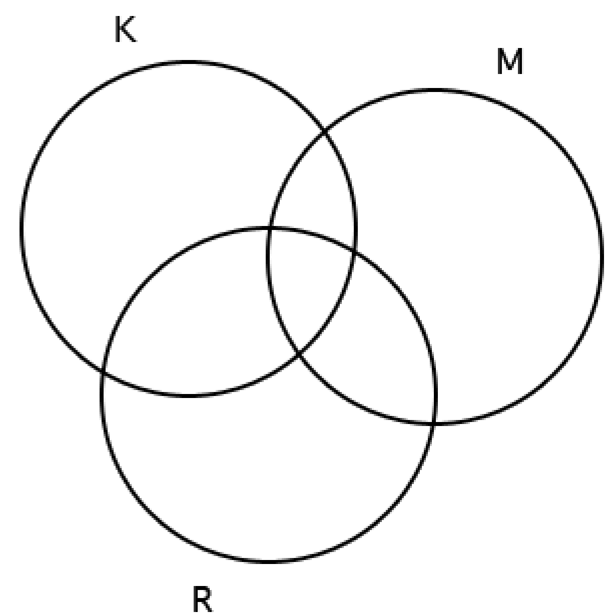
<u>Stap 3:</u>
8 leerlingen zijn lid van een sportvereniging en maken muziek.

2.1 Telproblemen visualiseren [3]

<u>Voorbeeld:</u>
Superburger verkoopt hamburgers met ketchup, mosterd of rauwkost.
Op een dag verkopen ze 256 hamburgers. 140 met mosterd, 140 met ketchup, 84 met ketchup en rauwkost, 62 met mosterd maar zonder rauwkost, 68 met ketchup en mosterd, 38 met alles en 20 zonder iets erop.

a) Hoeveel hamburgers worden er verkocht zonder rauwkost?
b) Hoeveel hamburgers worden er verkocht met enkel rauwkost?

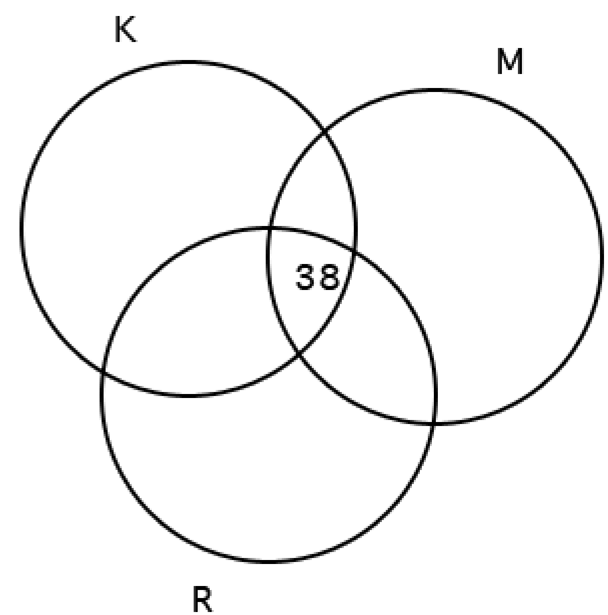
<u>Stap 1:</u>
Teken een drietal cirkels die elkaar overlappen. Dit is een **venndiagram**.



2.1 Telproblemen visualiseren [3]

<u>Voorbeeld:</u>
Superburger verkoopt hamburgers met ketchup, mosterd of rauwkost.
Op een dag verkopen ze 256 hamburgers. 140 met mosterd, 140 met ketchup, 84 met ketchup en rauwkost, 62 met mosterd maar zonder rauwkost, 68 met ketchup en mosterd, 38 met alles en 20 zonder iets erop.

<u>Stap 2:</u>
38 hamburgers hebben alle drie de Ingrediënten. Het getal 38 komt in het deel waar de drie cirkels elkaar overlappen.



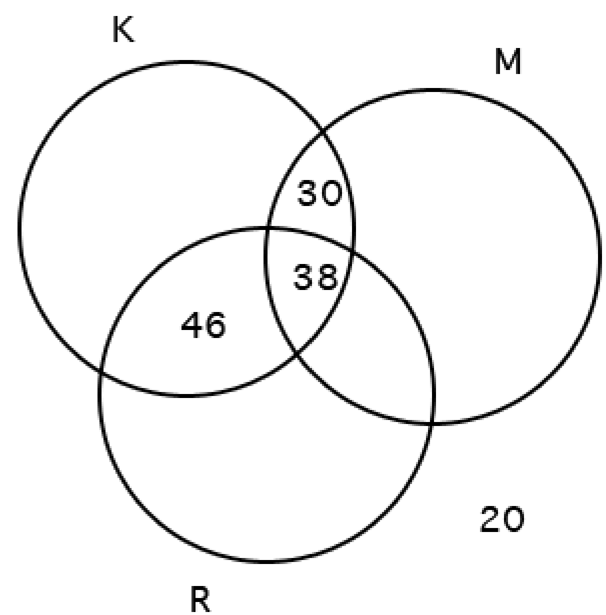
2.1 Telproblemen visualiseren [3]

Voorbeeld:
Superburger verkoopt hamburgers met ketchup, mosterd of rauwkost.
Op een dag verkopen ze 256 hamburgers. 140 met mosterd, 140 met ketchup, 84 met ketchup en rauwkost, 62 met mosterd maar zonder rauwkost, 68 met ketchup en mosterd, 38 met alles en 20 zonder iets erop.

Stap 3:
68 hamburgers hebben ketchup en mosterd.
Van de 68 hamburgers hebben er 38 alles.
Er zijn dus 68 – 38 = 30 hamburgers met ENKEL ketchup en mosterd.

84 hamburgers hebben ketchup en rauwkost.
Van de 84 hamburgers hebben er 38 alles.
Er zijn dus 84 – 38 = 46 hamburgers met ENKEL ketchup en rauwkost.

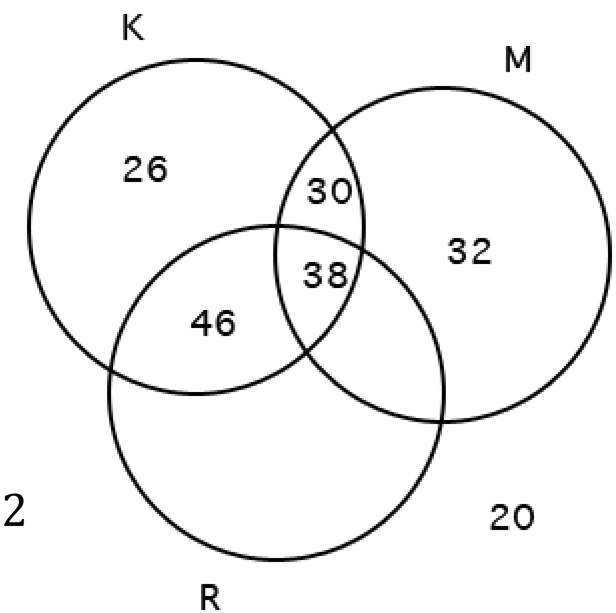
20 hamburgers hebben niets.



2.1 Telproblemen visualiseren [3]

Voorbeeld:
Superburger verkoopt hamburgers met ketchup, mosterd of rauwkost.
Op een dag verkopen ze 256 hamburgers. 140 met mosterd, 140 met ketchup, 84 met ketchup en rauwkost, 62 met mosterd maar zonder rauwkost, 68 met ketchup en mosterd, 38 met alles en 20 zonder iets erop.

Stap 4:
140 hamburgers hebben ketchup. Hier moet je alle hamburgers met ook een ander ingrediënt vanaf halen. Dan krijg je het aantal hamburgers met enkel ketchup. Dit zijn er:
140 – 30 – 38 – 46 = 26.

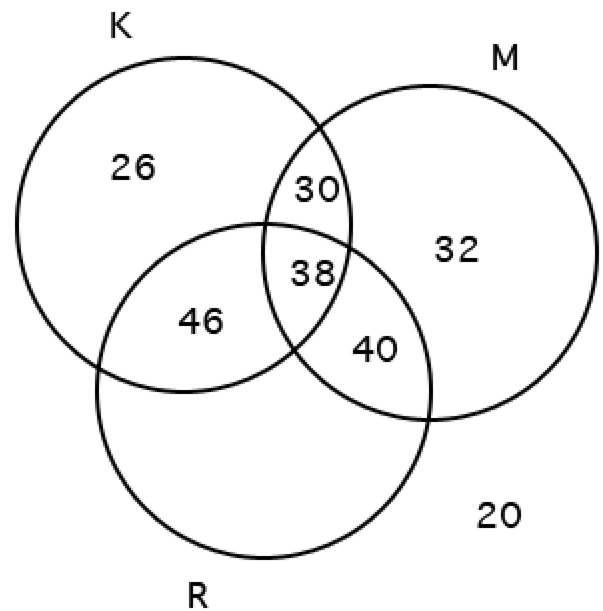


62 hamburgers hebben mosterd maar geen rauwkost. Van deze 62 hamburgers hebben er 30 mosterd en ketchup zonder rauwkost. 62 – 30 = 32 hamburgers hebben nu enkel mosterd.

2.1 Telproblemen visualiseren [3]

<u>Voorbeeld:</u>
Superburger verkoopt hamburgers met ketchup, mosterd of rauwkost.
Op een dag verkopen ze 256 hamburgers. 140 met mosterd, 140 met ketchup, 84 met ketchup en rauwkost, 62 met mosterd maar zonder rauwkost, 68 met ketchup en mosterd, 38 met alles en 20 zonder iets erop.

<u>Stap 5:</u>
140 hamburgers hebben mosterd. Het aantal hamburgers met mosterd en rauwkost wordt nu:
140 – 32 – 30 – 38 = 40.

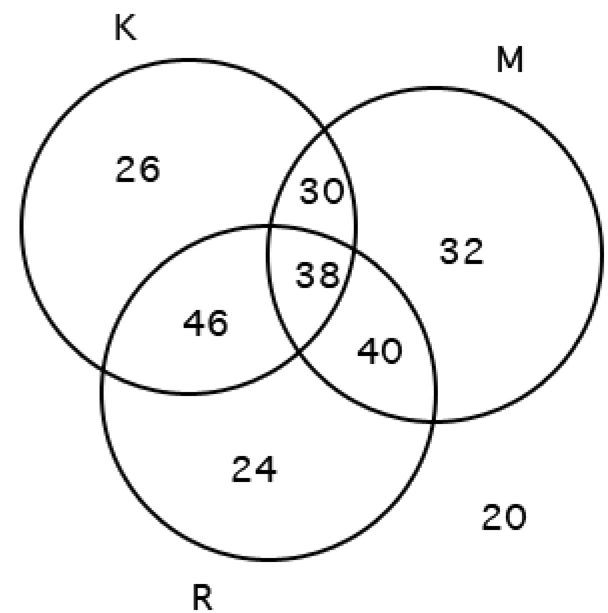


2.1 Telproblemen visualiseren [3]

<u>Voorbeeld:</u>
Superburger verkoopt hamburgers met ketchup, mosterd of rauwkost.
Op een dag verkopen ze 256 hamburgers. 140 met mosterd, 140 met ketchup, 84 met ketchup en rauwkost, 62 met mosterd maar zonder rauwkost, 68 met ketchup en mosterd, 38 met alles en 20 zonder iets erop.

<u>Stap 6:</u>
De laatste lege plaats is het aantal hamburgers met enkel rauwkost. Dit is:
256 = 26 – 30 – 32 – 46 – 38 – 40 – 20 = 24.

Het aantal hamburgers zonder rauwkost is:
26 + 30 + 32 + 20 = 108

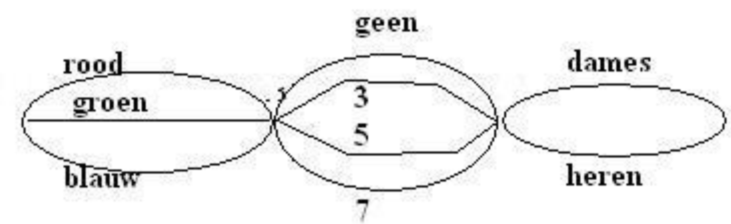


2.2 Tellen met en zonder herhaling [1]

Voorbeeld 1:

Bij een bepaald model fiets heeft de klant de volgende keuzes:

- De kleur van de fiets kan rood, groen of blauw zijn;
- De fiets kan geen, 3, 5 of 7 versnellingen hebben;
- De fiets kan een dames- of herenfiets zijn.

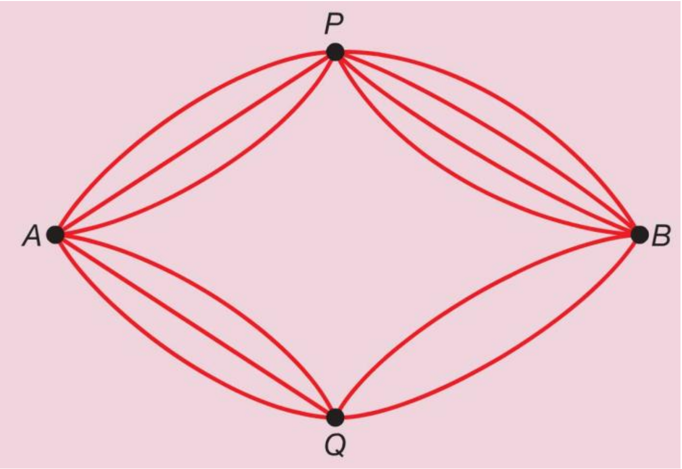


Het aantal mogelijke soorten van dit model is nu: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$

Definitie vermenigvuldigingsregel:

Bestaat een experiment uit drie handelingen, waarbij de eerste handeling op p manieren kan worden uitgevoerd, de tweede op q manieren en de derde op r manieren, dan zijn er voor het gehele experiment $p \cdot q \cdot r$ manieren.

2.2 Tellen met en zonder herhaling [1]



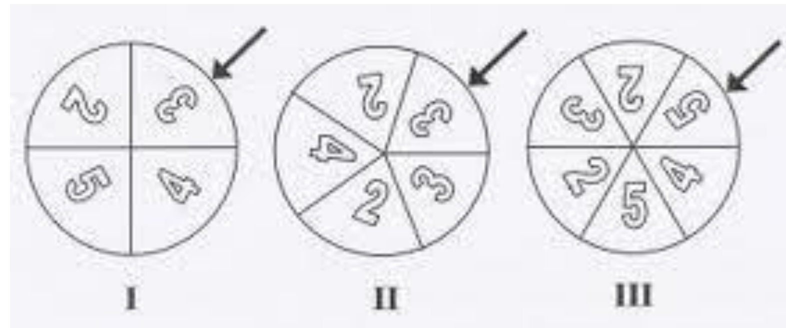
Voorbeeld 2:
Vanuit punt A kun je via P of Q naar punt B.

Als je via punt P gaat, zijn er $3 \cdot 4 = 12$ manieren.
Als je via punt Q gaat, zijn er $3 \cdot 2 = 6$ manieren.

In totaal zijn er dus $12 + 6 = 18$ manieren om van punt A naar punt B te gaan.

Definitie:
Kan handeling I op p manieren en handeling II op q manieren dan kan:
- Handeling 1 EN handeling II op $p \cdot q$ manieren (**vermenigvuldigingsregel**);
- Handeling 1 OF handeling II op $p + q$ manieren (**somregel**).

2.2 Tellen met en zonder herhaling [1]



Voorbeeld 3:
Bereken het aantal uitkomsten met drie keer een 2.

(222) = $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$

Voorbeeld 4:
Bereken het aantal uitkomsten waarbij alle getallen groter dan 3 zijn.

(>3>3>3) = $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$

Voorbeeld 5:
Bereken het aantal uitkomsten met twee keer het getal 2 en een keer het getal 4

(224) + (242) + (422) = $1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 2 + 2 + 4 = 8$

2.2 Tellen met en zonder herhaling [2]

Voorbeeld 1:
Een bestuur bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt eerst een voorzitter, dan een secretaris en tot slot een penningmeester gekozen.

Bereken het aantal manieren om de functies te verdelen:

Aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Let op:
- Als je de voorzitter kiest, mag deze gekozen worden uit 6 personen;
- Als je de secretaris kiest, zijn er nog 5 personen over om uit te kiezen;
- Als je de penningmeester kiest, zijn er nog 4 personen over om uit te kiezen.

Er wordt nu gekozen **zonder herhaling**. Een persoon die eenmaal gekozen is, mag niet meer opnieuw gekozen worden.

2.2 Tellen met en zonder herhaling [2]

Voorbeeld 2:
Een internetwinkel die boeken verkoopt, geeft elk boek een unieke productcode.
De productcode bestaat uit 2 letters – 2 cijfers – 3 letters;
Alle cijfers mogen gebruikt worden;
Alle letters (behalve de I en de O mogen gebruikt worden);
Bereken het aantal mogelijke productcodes.

Aantal = $24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 796.262.400$

Let op:

- Als je een letter of cijfer gekozen hebt, mag je deze de volgende keer weer opnieuw kiezen.

Er wordt nu gekozen **met herhaling**. Een letter of cijfer die eenmaal gekozen is, mag weer opnieuw gekozen worden.

2.3 Permutaties en combinaties [1]

Voorbeeld 1:

Een bestuur bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt eerst een voorzitter, dan een secretaris en tot slot een penningmeester gekozen.

Bereken het aantal manieren om de functies te verdelen:

Aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Let op:

- De volgorde van het kiezen is in dit voorbeeld van belang;
- Er zijn nu 120 rangschikkingen of permutaties mogelijk;
- Het aantal **permutaties** van 3 uit 6, ofwel het aantal rangschikkingen van drie dingen die je uit zes dingen kiest, is $6 \cdot 5 \cdot 4$.

2.3 Permutaties en combinaties [1]

Voorbeeld 2:
Een bestuur bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt eerst een voorzitter, dan een secretaris en dan een penningmeester gekozen. Daarna volgen een eerste, tweede en derde bestuurslid

Bereken het aantal manieren om de functies te verdelen:

Aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Definitie permutaties:
- Het aantal permutaties van n dingen, dus het aantal rangschikkingen van n dingen is: $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$;
- Dit wordt ook geschreven als $\boldsymbol{n!}$ (n-faculteit).

2.3 Permutaties en combinaties [1]

<u>Permutaties op de GR:</u>

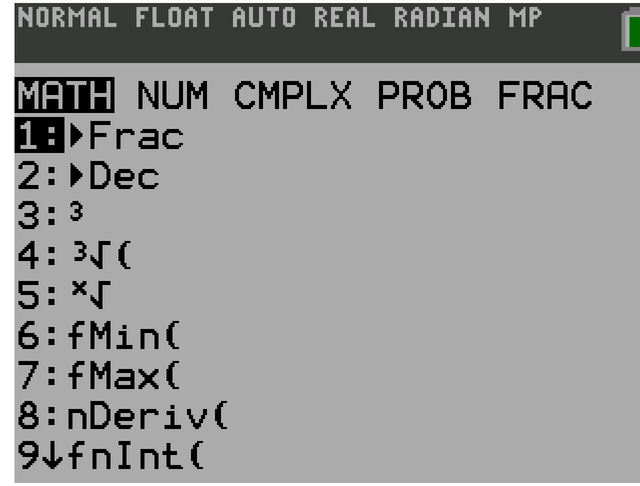
Bereken het aantal permutaties van 7 uit 11 (11 nPr 7):

<u>Stap 1:</u>

Toets op het beginscherm 11 in.

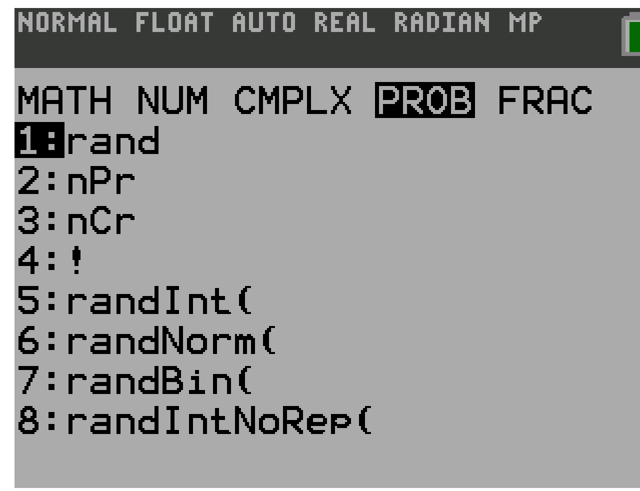
<u>Stap 2:</u>

Druk op de MATH toets van de GR:



<u>Stap 3:</u>

Ga met de cursor naar PROB:

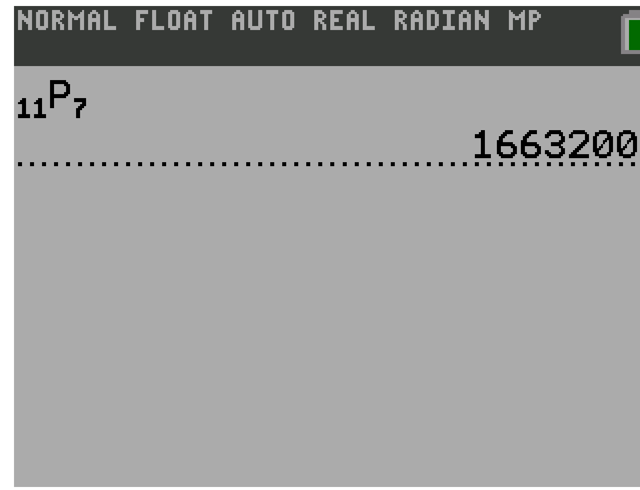


2.3 Permutaties en combinaties [1]

<u>Permutaties op de GR:</u>
Bereken het aantal permutaties van 7 uit 11 (11 nPr 7):

<u>Stap 4:</u>
Selecteer optie 2 en druk op ENTER.
In het scherm staat Nu $_{11}$P.
Toets 7 in en druk op ENTER.

<u>Let op:</u>
Bij het uitrekenen van 11!
kies je de vierde optie bij PROB.



2.3 Permutaties en combinaties [2]

<u>Voorbeeld 1:</u>
Een bestuur bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt eerst een voorzitter, dan een secretaris en dan een penningmeester gekozen.
Bereken het aantal manieren om de functies te verdelen:

- De volgorde van kiezen is van belang;
- Omdat de volgorde van kiezen van belang is, gebruik je **permutaties**;
- Je rekent het aantal permutaties van 3 uit 6 uit (6 nPr 3).

Aantal = $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

2.3 Permutaties en combinaties [2]

Voorbeeld 2:

Een groep bestaat uit 6 personen. Uit deze 6 personen wordt drie personen gekozen in een feestcommissie, die een feest voor moet gaan bereiden. Bereken het aantal manieren om deze drie mensen te kiezen:

- Er zijn geen functies in de commissie, dus de volgorde van kiezen is niet van belang;
- Als Piet, Kees en Jan gekozen worden, zijn de volgende keuzes dus gelijk aan elkaar: JKP, JPK, KJP, KPJ, PJK, PKJ;
- Elke volgorde komt nu 3! = 6 keer teveel voor;
- Omdat de volgorde van kiezen niet belang is, gebruik je **combinaties**;
- Je rekent het aantal combinaties van 3 uit 6 uit (6 nCr 3).

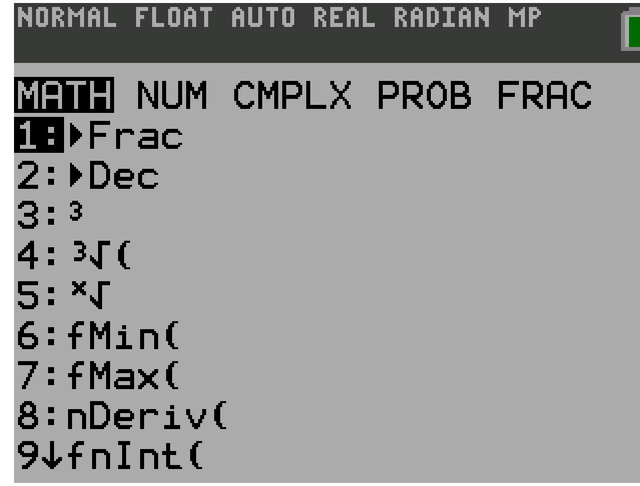
Aantal = $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \binom{6}{3} = 20$

2.3 Permutaties en combinaties [2]

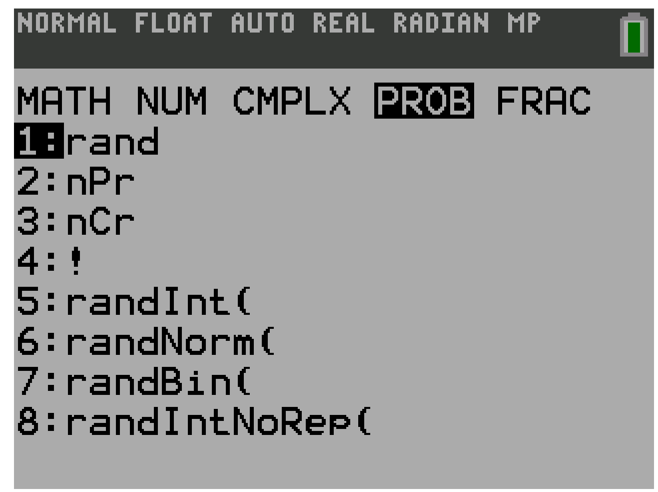
<u>Combinaties op de GR:</u>
Bereken het aantal combinates van 7 uit 11 (11 nCr 7):

<u>Stap 1:</u>
Toets op het beginscherm 11 in.

<u>Stap 2:</u>
Druk op de MATH toets van de GR:



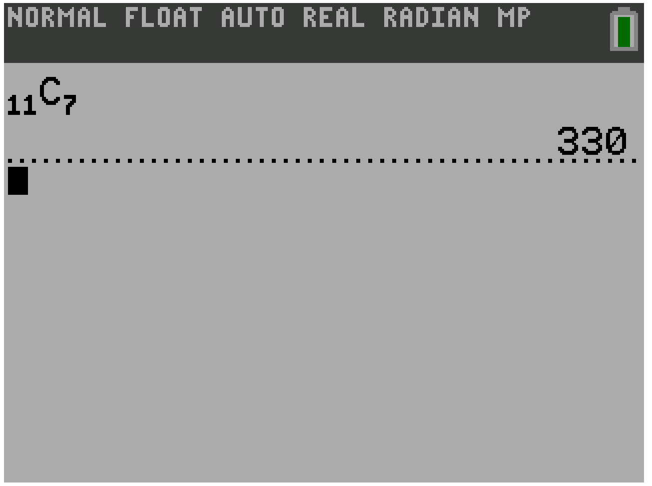
<u>Stap 3:</u>
Ga met de cursor naar PROB:



2.3 Permutaties en combinaties [2]

<u>Combinaties op de GR:</u>
Bereken het aantal combinates van 7 uit 11 (11 nCr 7):

<u>Stap 4:</u>
Selecteer optie 3 en druk op ENTER.
In het scherm staat Nu $_{11}$C.
Toets 7 in en druk op ENTER.



2.3 Permutaties en combinaties [3]

Voorbeeld:
Peter doet mee aan een loterij. In totaal zijn er 50 loten. Van de 50 loten zijn er 10 loten die recht geven op een prijs. Peter koopt 5 loten.

Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn dat Peter minstens 4 keer prijs heeft:

Aantal = Aantal keer 4 prijs + Aantal keer 5 prijs

$$= \binom{10}{4}\binom{40}{1} + \binom{10}{5}\binom{40}{0} = 8.400 + 252 = 8.652$$

Let op:
De volgorde van kiezen is niet van belang, dus je mag nu combinaties gebruiken.

2.3 Permutaties en combinaties [3]

Voorbeeld:

In een klas zitten 20 leerlingen. Voor de komende schoolreis zijn er drie Bestemmingen:

6 leerlingen mogen naar Antwerpen;

9 leerlingen mogen naar Utrecht;

5 leerlingen mogen naar Den Haag.

Bereken op hoeveel verschillende manieren de klas ingedeeld kan worden:

$$\text{Aantal} = \binom{20}{6}\binom{14}{9}\binom{5}{5} = 77.597.520$$

Let op:

- De volgorde van kiezen is niet van belang, dus je mag nu combinaties gebruiken;
- Als de 6 leerlingen die naar Antwerpen gaan gekozen zijn, blijven er nog 14 leerlingen over. Hieruit worden er 9 gekozen die naar Utrecht gaan. Enz.;
- Het maakt niet uit, welke groep je als eerste kiest. Je mag dus ook eerst de 9 leerlingen die naar Utrecht gaan kiezen, dan de 6 leerlingen die naar Antwerpen gaan en dan de 5 leerlingen die naar Den Haag gaan.

2.4 Rijtjes en roosters [1]

Voorbeeld 1:

Een rij bestaat uit 9 letters. Op elke plek in deze rij moet de letter A of B komen te staan.

Hoeveel rijen zijn er mogelijk met 4 A's en 5 B's?

Aantal = $\binom{9}{4}\binom{5}{5} = 126$ of $\binom{9}{5}\binom{4}{4} = 126$

Je kunt dus eerst 4 plaatsen kiezen waar de A's komen staan en dan de B's op de vijf resterende plaatsen wegzetten. Je kunt ook eerst 5 plaatsen kiezen waar de B's komen te staan en dan de A's op de vier overige plaatsen wegzetten.

Voorbeeld 2:

Hoeveel rijen zijn er mogelijk met 2 A's en 7 B's?

Aantal = $\binom{9}{2}\binom{7}{7} = 36$ of $\binom{9}{7}\binom{2}{2} = 36$

2.4 Rijtjes en roosters [1]

<u>Voorbeeld 3:</u>
Een rij bestaat uit 9 letters. Op elke plek in deze rij moet de letter A of B komen te staan.
Hoeveel rijen zijn er mogelijk met op elke plek een A of een B?

<u>Antwoordmogelijkheid 1:</u>

Aantal = $\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}=512$

<u>Antwoordmogelijkheid 2:</u>
Op elke plek heb je twee keuzes (A of B):

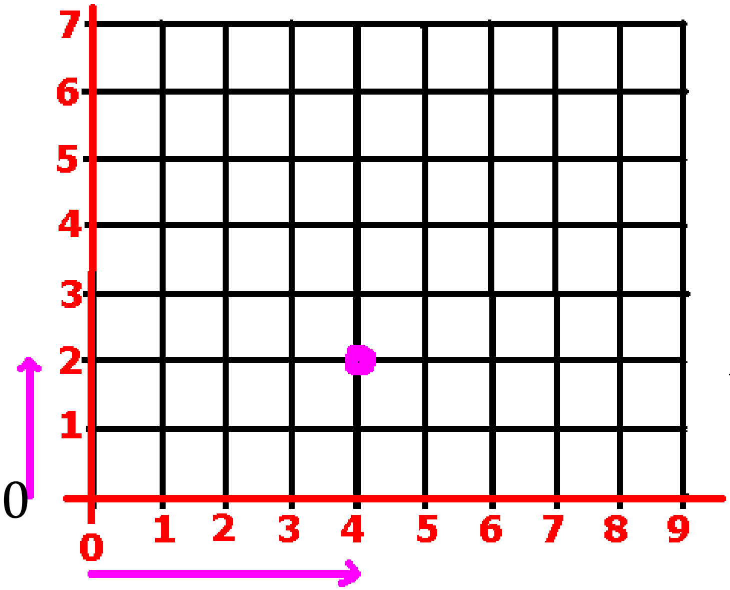
Aantal = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$

2.4 Rijtjes en roosters [1]

Voorbeeld 1:
Bereken het aantal mogelijke routes van (0,0) naar (9,7) zonder dat er een omweg gemaakt wordt.

Om van (0,0) naar (9,7) te gaan, moet je altijd 9 keer naar rechts en 7 keer omhoog.

Het aantal routes is nu: $\binom{16}{9} = \binom{16}{7} = 11.440$



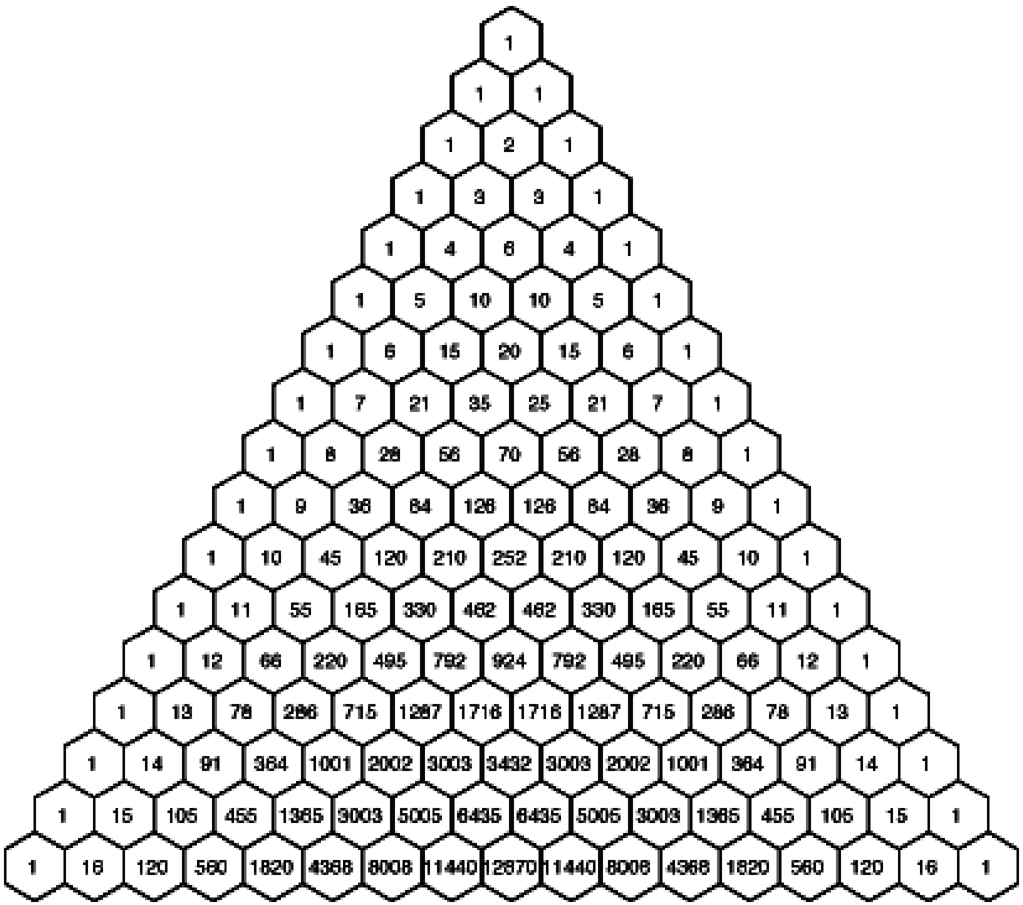
Voorbeeld 2:
Bereken het aantal mogelijke routes van (0,0) naar (9,7) via het punt (4,2)

Om van (0,0) naar (4,2) te gaan, moet je altijd 4 keer naar rechts en 2 keer omhoog. Om van (4,2) naar (9,7) te gaan, moet je altijd 5 keer naar rechts en 5 keer omhoog.

Het aantal routes is nu: $\binom{6}{4}\binom{10}{5} = 3.780$

2.4 Rijtjes en roosters [2]

Driehoek van Pascal:



Elk getal in de driehoek van Pascal geeft het aantal routes om vanuit de top op die plaats te komen.

De getallen in de n-de rij zijn:

$$\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{n}$$

De som van de getallen in de n-de rij is 2^n.

Elk getal krijg je door de twee getallen die er schuin boven staan bij elkaar op te tellen.

2.4 Rijtjes en roosters [3]

Voorbeeld 1

Een rij bestaat uit 9 letters. Op elke plek in deze rij moet de letter A, B of C komen te staan. Hoeveel rijen zijn er mogelijk met 3 A's, 4 B's en 2 C's?

Aantal = $\binom{9}{3}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = 1260$ of $\binom{9}{4}\binom{5}{2}\binom{3}{3} = 1260$

Je kunt dus eerst 3 plaatsen kiezen waar de A's komen staan en dan 4 plaatsen voor de B's en op de resterende 2 plaatsen komen C's te staan.

Je kunt ook eerst de 4 plaatsen kiezen waar de B's komen te staan en dan de 2 plaatsen waar de C's komen te staan. Op de resterende 3 plaatsen komen dan A's te staan.