7.0 Voorkennis

Voorbeeld:
Een gokkast bestaat uit een drietal schijven die ronddraaien.
Op schijf 1 staan: 5 bananen, 4 appels, 3 citroenen en 3 kersen;
Op schijf 2 staan: 7 bananen, 3 appels, 2 citroenen en 3 kersen;
Op schijf 3 staan: 1 banaan, 5 appels, 6 citroenen en 3 kersen.

a) Bereken de kans op 3 keer appel:

P(3 keer appel) = P(aaa) = $\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{60}{3375} \approx 0{,}0178$

b) Bereken de kans op 2 keer citroen:

P(2 keer citroen) = $P(\cancel{c}cc) + P(c\cancel{c}c) + P(cc\cancel{c})$ =

$$\frac{12}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{6}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{6}{15} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{9}{15} = 0{,}128$$

c) Bereken de kans op 0 keer kers:

P(0 keer kers) = $P(\cancel{kkk})$ = $\frac{12}{15} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{12}{15} = 0{,}512$

7.0 Voorkennis

Bij samengestelde kansexperimenten maak je gebruik van de productregel.

Productregel:
Voor de gebeurtenis G_1 bij het ene kansexperiment en de gebeurtenis G_2 bij het andere kansexperiment geldt:
$P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$

Somregel:
Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen G_1 en G_2 geldt de somregel:
$P(G_1 + G_2) = P(G_1) + P(G_2)$

7.0 Voorkennis

Voorbeeld:
Op een schijf staan een zestal afbeeldingen in even grote vakjes:
3 keer appel, 2 keer banaan, 1 keer peer.
Sandra draait zes keer aan de schijf.

a) Bereken de kans dat Sandra zes keer een banaan krijgt:

P(zes keer banaan) = P(bbbbbb) = $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \left(\frac{2}{6}\right)^6 \approx 0{,}00137$

b) Bereken de kans dat Sandra één keer een banaan krijgt:

P(een keer banaan) = P(b~~bbbbb~~) + P(~~b~~b~~bbbb~~) + P(~~bb~~b~~bbb~~)
+ P(~~bbb~~b~~bb~~) + P(~~bbbb~~b~~b~~) + P(~~bbbbb~~b)

Elke uitkomst heeft een kans van: $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5$

Er zijn $\binom{6}{1} = 6$ mogelijkheden voor de ene banaan.

P(een keer banaan) = $\binom{6}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5 \approx 0{,}2634$

7.0 Voorkennis

<u>Voorbeeld:</u>
Op een schijf staan een zestal afbeeldingen in even grote vakjes:
3 keer appel, 2 keer banaan, 1 keer peer.
Sandra draait zes keer aan de schijf.

c) Bereken de kans dat Sandra twee keer een banaan krijgt:

P(twee keer banaan) = *P*(bb~~bbbb~~) + *P*(b~~b~~b~~bbb~~) + …
+ … + *P*(~~bbb~~b~~b~~b) + *P*(~~bbbb~~bb)

Elke uitkomst heeft een kans van: $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4$

Er zijn $\binom{6}{2} = 15$ mogelijkheden voor de twee bananen.

$P(\text{twee keer banaan}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4 \approx 0{,}3292$

7.0 Voorkennis

Voorbeeld:
Peter doet mee aan een loterij. In totaal zijn er 50 loten. Van de 50 loten zijn er 10 loten die recht geven op een prijs. Peter koopt 5 loten.

Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn dat Peter minstens 4 keer prijs heeft:

Aantal = Aantal keer 4 prijs + Aantal keer 5 prijs

$$= \binom{10}{4}\binom{40}{1} + \binom{10}{5}\binom{40}{0} = 8.400 + 252 = 8.652$$

Let op:
De volgorde van kiezen is niet van belang, dus je mag nu combinaties gebruiken.

7.1 Het vaasmodel [1]

Voorbeeld 1:
Gegeven is een vaas met 15 knikkers (10 rood, 3 groen en 2 blauw).
3 knikkers worden uit de vaas gehaald.

Bereken de kans op 3 rode knikkers:

Stap 1:
Aantal mogelijke uitkomsten = $\binom{15}{3}$

[Er is sprake van trekken zonder teruglegging waarbij volgorde niet van belang is.]

Stap 2:
Aantal gunstige uitkomsten = $\binom{10}{3}\binom{5}{0}$

[De 3 knikkers moeten uit de groep van 10 rode getrokken worden. Uit de groep van 5 niet-rode knikkers wordt er geen één getrokken.]

Stap 3:
P(3 rode knikkers) = $\dfrac{\binom{10}{3}\binom{5}{0}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}264$

7.1 Het vaasmodel [1]

Voorbeeld 2:
Gegeven is een vaas met 15 knikkers (10 rood, 3 groen en 2 blauw).
3 knikkers worden uit de vaas gehaald.

Bereken de kans op 2 blauwe knikkers:

<u>Stap 1:</u>
Aantal mogelijke uitkomsten = $\binom{15}{3}$

[Er is sprake van trekken zonder teruglegging waarbij volgorde niet van belang is.]

<u>Stap 2:</u>
Aantal gunstige uitkomsten = $\binom{2}{2}\binom{13}{1}$

[2 knikkers komen uit de groep van 2 blauwe. 1 knikker komt uit de groep van 13 rode en groene knikkers]

<u>Stap 3:</u>
P(2 blauwe knikkers) = $\dfrac{\binom{2}{2}\binom{13}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}029$

7.1 Het vaasmodel [1]

Let op (Voorbeeld 1):

$$P(3 \text{ rode knikkers}) = \frac{\binom{10}{3}\binom{5}{0}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}264$$

10 + 5 = 15 EN 3 + 0 = 3

Let op (Voorbeeld 2):

$$P(2 \text{ blauwe knikkers}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{13}{1}}{\binom{15}{3}} \approx 0{,}029$$

2 + 13 = 15 EN 2 + 1 = 3

7.1 Het vaasmodel [2]

Voorbeeld:
Een groep van 25 personen bestaat uit 10 mannen en 15 vrouwen. Uit deze groep worden 5 personen gekozen.

Dit kun je vergelijken met een vaas met 25 knikkers (10 rood en 15 groen), waaruit je er 5 pakt.

$$P(5\text{ mannen}) = \frac{\binom{10}{5}\binom{15}{0}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}00474$$

$$P(2\text{ vrouwen}) = \frac{\binom{10}{3}\binom{15}{2}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}237$$

Let op:
$\binom{n}{0}$ is gelijk aan 1 voor elke n. Deze term mag je dus weglaten.

7.2 De complementregel [1]

Voorbeeld:
Sandra gooit met 4 dobbelstenen. Elke dobbelsteen heeft 6 ogen. Bereken de kans dat de som van de gegooide ogen 22 of minder is.

P(som ogen is 22 of minder) = $P(4) + P(5) + P(6) + \ldots + P(20) + P(21) + P(22)$

Let op:
- Bij het gooien met vier dobbelstenen kan de som van de ogen nooit 1, 2 of 3 zijn;
- Om het antwoord te krijgen, moet je 19 kansen berekenen.

Bij dit soort opgaven kun je gebruik maken van de complementregel:

P(som ogen is 22 of minder) = 1 – P(som ogen is 23 of 24)

Complementregel algemeen:
P(gebeurtenis) = 1 – P(complement gebeurtenis)

7.2 De complementregel [1]

Voorbeeld:
Sandra gooit met 4 dobbelstenen. Elke dobbelsteen heeft 6 ogen. Bereken de kans dat de som van de gegooide ogen 22 of minder is.

P(som ogen is 22 of minder) = 1 – P(som ogen is 23 of 24)

Stap 1:
Aantal mogelijke oplossingen = 6 · 6 · 6 · 6 = 1296

Stap 2:
Aantal gunstige oplossingen = 5 [6666 5666 6566 6656 6665]

Stap 3:
P(som ≤ 22) = 1 – P(som is 23 of 24) = $1 - \frac{5}{1296} = \frac{1291}{1296}$

Let op:
Je gebruikt hier de somregel: Voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen G_1 en G_2 Geldt: $P(G_1 + G_2) = P(G_1) + P(G_2)$.

7.2 De complementregel [2]

Voorbeeld:
Op een schijf staan een zestal afbeeldingen in even grote vakjes:
3 keer appel, 2 keer banaan, 1 keer peer.
Sandra draait zes keer aan de schijf.

a) Bereken de kans dat Sandra twee keer een banaan krijgt:

$P(\text{twee keer banaan}) = P(\text{bb}\cancel{\text{bbbb}}) + P(\text{b}\cancel{\text{b}}\text{b}\cancel{\text{bbb}}) + \ldots$
$+ \ldots + P(\cancel{\text{bbb}}\text{b}\cancel{\text{b}}\text{b}) + P(\cancel{\text{bbbb}}\text{bb})$

Elke uitkomst heeft een kans van: $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4$

Er zijn $\binom{6}{2} = 15$ mogelijkheden voor de twee bananen.

$P(\text{twee keer banaan}) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4 \approx 0{,}3292$

7.2 De complementregel [2]

<u>Voorbeeld:</u>
Op een schijf staan een zestal afbeeldingen in even grote vakjes:
3 keer appel, 2 keer banaan, 1 keer peer.
Sandra draait zes keer aan de schijf.

b) Bereken de kans dat Sandra minstens twee keer een banaan krijgt:

P(minstens twee keer banaan) = 1 – P(1 banaan) – P(0 banaan) =

$$1 - \binom{6}{1} \cdot \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^5 - \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^6 \approx 0{,}5391$$

<u>Let op:</u>
In dit voorbeeld wordt gebruik gemaakt van de productregel:

Voor de gebeurtenis G_1 bij het ene kansexperiment en de gebeurtenis G_2 bij het andere kansexperiment geldt: $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$

7.3 Trekken met en zonder terugleggen [1]

Voorbeeld 1 (Trekken met teruglegging):
Jan gooit vijf keer met een dobbelsteen. Bereken de kans dat hij twee keer minstens vijf ogen gooit.

Er is sprake van trekken met teruglegging. Een getal dat gegooid is met de dobbelsteen kan later opnieuw gegooid worden.

$P(\text{twee keer minstens vijf gooien}) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^3 \approx 0{,}3292$

Let op:
Bij trekken **met teruglegging** wordt gebruik gemaakt van de productregel:

Voor de gebeurtenis G_1 bij het ene kansexperiment en de gebeurtenis G_2 bij het andere kansexperiment geldt: $P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$

7.3 Trekken met en zonder terugleggen [1]

Voorbeeld 2 (Trekken zonder teruglegging):
In een bak zitten 6 knikkers. 2 knikkers zijn rood en 4 knikkers zijn groen.
Jan pakt 5 knikkers uit de bak. Bereken de kans dat Jan twee keer een rode knikker pakt.

Er is sprake van trekken zonder teruglegging. Een knikker die uit de vaas gehaald is, kan niet nogmaals gepakt worden.

$$P(\text{twee rode knikkers}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{3}}{\binom{6}{5}} = \frac{2}{3}$$

Let op:
Bij trekken **zonder teruglegging** wordt gebruik gemaakt van combinaties.

7.3 Trekken met en zonder terugleggen [1]

<u>Voorbeeld 2 (Trekken zonder teruglegging – Alternatieve oplossing):</u>
In een bak zitten 6 knikkers. 2 knikkers zijn rood en 4 knikkers zijn groen.
Jan pakt 5 knikkers uit de bak. Bereken de kans dat Jan twee keer een rode knikker pakt.

Er is sprake van trekken zonder teruglegging. Een knikker die uit de vaas gehaald is, kan niet nogmaals gepakt worden.

P(twee rode knikkers) = $\binom{5}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{3}$

<u>Let op:</u>
RR~~RRR~~ is één van de manieren om bij vijf keer trekken, 2 rode knikkers te hebben.

De kans op deze volgorde is $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2}$. Je hebt steeds één knikker minder in de bak zitten. In totaal zijn er $\binom{5}{2}$ van dit soort volgordes.

7.3 Trekken met en zonder terugleggen [2]

Voorbeeld 1:
Uit een vaas met 500.000 knikkers worden 5 knikkers gehaald. Van de knikkers in de vaas zijn er 350.000 groen en 150.000 rood. Bereken de kans dat er 3 groene knikkers uit de vaas gehaald worden.

Er is nu sprake van trekken zonder teruglegging. We gebruiken nu dus combinaties:

$$P(3 \text{ groene knikkers}) = \frac{\binom{350.000}{3}\binom{150.000}{2}}{\binom{500.000}{5}} \approx 0{,}3087$$

Het berekenen van de oplossing waarbij we doen of er sprake is van trekken met Teruglegging (De inhoud van de vaas verandert immers nauwelijks als we 5 knikkers van de 500.000 eruit halen)

$$P(3 \text{ groene knikkers}) = \binom{5}{2}\left(\frac{350.000}{500.000}\right)^3\left(\frac{150.000}{500.000}\right)^2 \approx 0{,}3087$$

7.3 Trekken met en zonder terugleggen [2]

Algemeen:
Bij een kleine steekproef uit een grote populatie mag je trekken zonder terugleggen opvatten als trekken met terugleggen.

Voorbeeld 2:
Uit een onderzoek in september 2010 bleek dat 65% van alle huishoudens digitale televisie had. Voor een onderzoek worden 20 personen ondervraagd.

a) Bereken de kans dat al deze 20 personen digitale televisie hebben.

$$P(20 \text{ digitaal}) = \binom{20}{0}(0{,}65)^{20}(0{,}35)^{0} \approx 0{,}000181$$

b) Bereken de kans dat precies 13 personen digitale televisie hebben.

$$P(13 \text{ digitaal}) = \binom{20}{13}(0{,}65)^{13}(0{,}35)^{7} \approx 0{,}1844$$

7.4 Toevalsvariabelen [1]

Voorbeeld:
Bij een loterij worden 50 loten verkocht. Er zijn 10 loten, die recht op een prijs geven. Eén van deze prijzen is de hoofdprijs. De rest zijn gewone prijzen. Sander koopt 4 loten.

X = het aantal hoofdprijzen
Y = het aantal gewone prijzen

X en Y zijn **toevalsvariabelen**.

P(Sander wint de hoofdprijs) = $P(X = 1) = \dfrac{\binom{1}{1}\binom{49}{4}}{\binom{50}{5}} \approx 0{,}1$

P(Sander wint drie gewone prijzen en geen hoofdprijs) =

$P(X = 0 \text{ en } Y = 3) = \dfrac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}\binom{40}{2}}{\binom{50}{5}} \approx 0{,}031$

7.4 Toevalsvariabelen [2]

Voorbeeld:
Yvette pakt vier knikkers uit een vaas waar er 20 inzitten. 9 van de knikkers zijn rood en 11 van de knikkers zijn blauw.

X = het aantal rode knikkers dat Yvette pakt.

Er zijn nu een vijftal mogelijk uitkomsten:

0 rode knikkers pakken ($X = 0$);
1 rode knikker pakken ($X = 1$);
2 rode knikkers pakken ($X = 2$);
3 rode knikkers pakken ($X = 3$);
4 rode knikkers pakken ($X = 4$).

Het overzicht van alle mogelijke waarden van de toevalsvariabele met bijbehorende kansen is een **kansverdeling**.

7.4 Toevalsvariabelen [2]

Voorbeeld:
Yvette pakt vier knikkers uit een vaas waar er 20 inzitten. 9 van de knikkers zijn rood en 11 van de knikkers zijn blauw.

X = het aantal rode knikkers dat Yvette pakt.

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,068	0,307	0,409	0,191	0,026

Let op:
Alle kansen van elke kansverdeling tellen steeds op tot één.

7.4 Toevalsvariabelen [3]

Voorbeeld:

In de tabel hieronder staan de gegevens van een groep van 33 jongeren:

	Zwemmen	**Hockey**	**Voetbal**	
Jongen	2	5	13	20
Meisje	5	7	1	13
	7	12	14	

P(leerling doet aan hockey) = $\frac{12}{33} \approx 0{,}364$

P(een jongen die aan hockey doet) = $\frac{5}{20} = 0{,}25$

P(een meisje die aan hockey doet) = $\frac{7}{13} = 0{,}54$

7.4 Toevalsvariabelen [3]

Uit het voorbeeld is de volgende conclusie te trekken:

Er bestaat een verband tussen het geslacht van de jongere en het feit of de jongere hockey speelt. De kans dat een jongen hockey speelt is 0,25. De kans dat een meisje hockey speelt is 0,54.

In dit geval zijn de gebeurtenissen “geslacht” en “hockey spelen” dus **afhankelijk** van elkaar. Wanneer de berekende kansen allemaal gelijk aan elkaar zouden zijn, zouden de gebeurtenissen “geslacht” en “hockey spelen” **onafhankelijk** van elkaar zijn.

Algemeen:

- De toevalsvariabelen X en Y zijn onafhankelijk als voor elke mogelijke x en y geldt: $P(X = x$ onder de voorwaarde $Y = y) = P(X = x)$;
- De toevalsvariabelen X en Y zijn afhankelijk als voor minimaal één paar x en y geldt: $P(X = x$ onder de voorwaarde $Y = \mathrm{y}) \neq P(X = x)$.