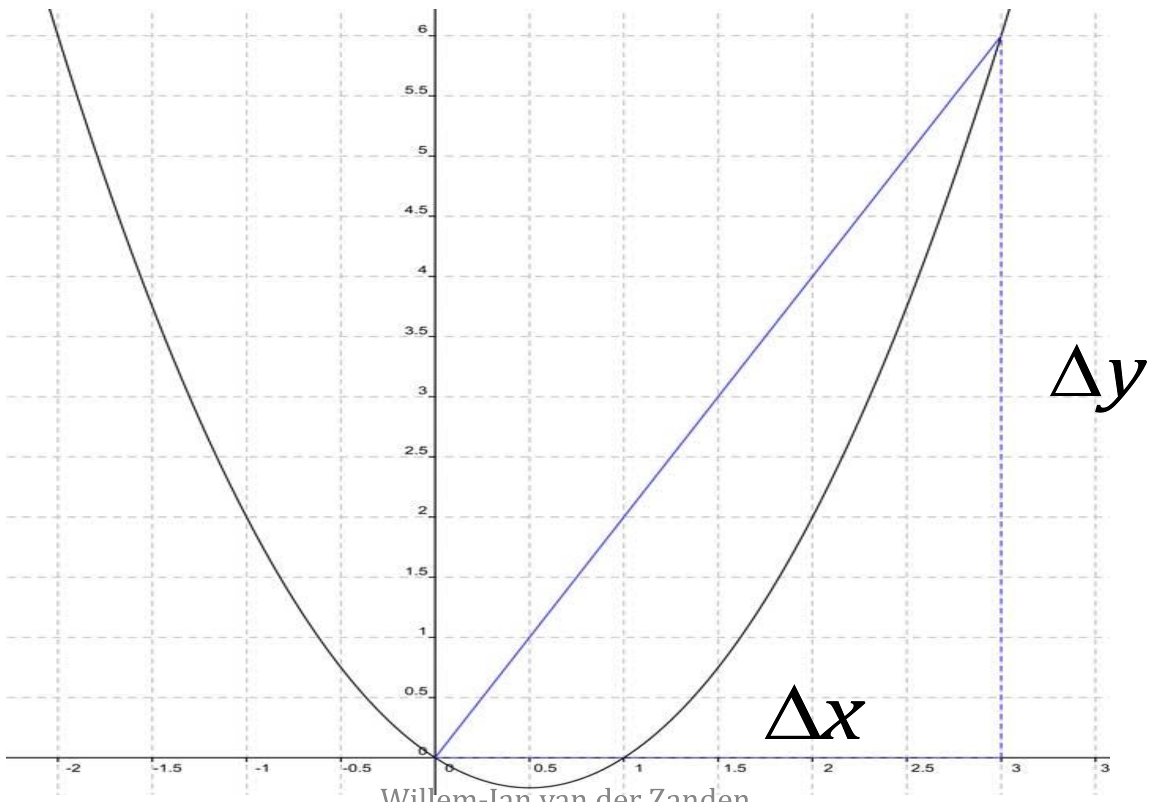
6.0 Differentiëren

Met het differentiequotiënt bereken je de gemiddelde verandering per tijdseenheid.

Voorbeeld: $f(x) = x^2 - x$

Differentiequotiënt van $f(x)$ op [0, 3] = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{6 - 0}{3 - 0} = 2$



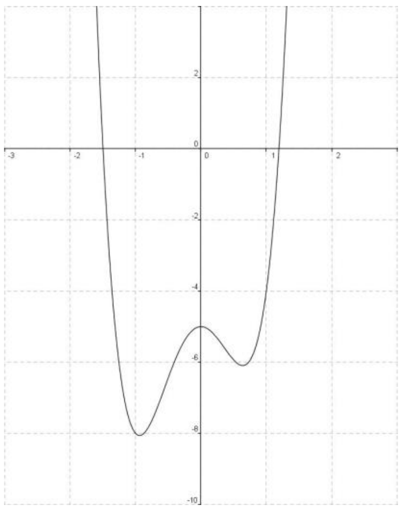
6.0 Differentiëren

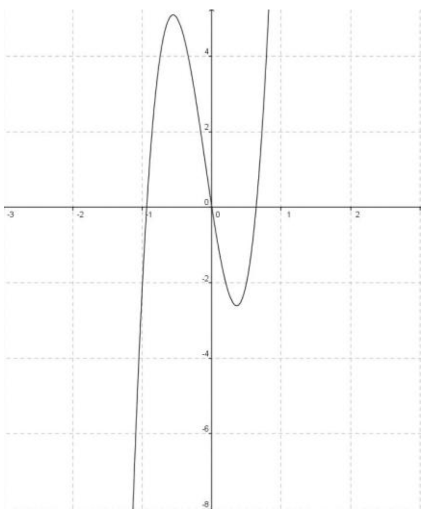
Algemeen:

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is:

- De gemiddelde toename van y op $[x_A, x_B]$;
- De richtingscoëfficiënt van de lijn AB;
- De helling van de lijn AB;
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

6.0 Differentiëren





- Linksboven is de grafiek van de functie $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5$ getekend op het interval [-2, 2];
- Deze grafiek heeft drie toppen;

- Linksonder is de hellingsgrafiek van de functie van f getekend;
- De hellingsgrafiek geeft in elk punt de snelheid aan waarmee de functie van f verandert;

- In de intervallen [-2; -0,94) en (0; 0,64) is $f(x)$ dalend. De hellingsgrafiek ligt onder de x-as;
- In de punten met x = -0,94, x = 0 en x = 0,64 heeft $f(x)$ een top. De hellingsgrafiek snijdt hier de x-as;
- In de intervallen (-0,94; 0) en (0,64, 2] is $f(x)$ stijgend. De hellingsgrafiek ligt boven de x-as;

6.0 Differentiëren

Een andere naam voor hellingfunctie is **afgeleide functie**.

De afgeleide van een functie *f* [*f'*] geeft voor elke *x*:
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek van *f* in het bijbehorende punt;
- De helling van de grafiek van *f* in het bijbehorende punt.

De formule van de afgeleide van een functie *f* kan gevonden worden met behulp van het differentiequotiënt op het interval [*x*, *x* + *h*]:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Op het moment dat *h* richting 0 gaat (en dus heel erg klein wordt), volgt uit het differentiequotiënt de afgeleide *f'*:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

6.0 Differentiëren

Algemeen:

$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$

$f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = nax^{n-1}$

$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(\mathrm{x})$

$f(x) = g(x) + h(x)$ geeft $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ [**Somregel**]

Productregel:

De afgeleide van $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ bereken je met:

$\boldsymbol{p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$

Quotiëntregel:

De afgeleide van $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ wordt nu:

$$q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2} = \frac{nat - \mathrm{tan}}{n^2}$$

6.0 Differentiëren

Voorbeeld:
Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 + 3x + 4$
Stel de met behulp van de afgeleide de vergelijking op van de raaklijn l in punt A met r.c. = 1

Stap 1:
Stel de afgeleide van de functie $f(x)$ op:

$l{:}y = ax + b$ en dus $l{:}y = x + b$
$f(x) = x^2 + 3x + 4$
$f'(x) = 2x + 3$

Stap 2:
Bereken wanneer de afgeleide gelijk is aan 1:

$f'(x) = 1$
$2x + 3 = 1$
$2x = -2$
$x_A = -1$

6.0 Differentiëren

Voorbeeld:
Gegeven is de functie: $f(x) = x^2 + 3x + 4$
Stel de met behulp van de afgeleide de vergelijking op van de raaklijn l in punt A met r.c. = 1

Stap 3:
Bepaal de y-coördinaat van het punt A:

$y_A = f(x_A) = (-1)^2 + 3 \cdot -1 + 4 = 2$

Stap 4:
Stel de vergelijking van de raaklijn l op:

$l: y = x + b$
Invullen van $A = (-1, 2)$ geeft:

$2 = -1 + b$
$b = 3$
Hieruit volgt: $l: y = x + 3$

6.1 Toppen en buigpunten [1]

Voorbeeld:
Gegeven is de functie $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 120x + 150$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

Stap 1:
Bereken de afgeleide van de gegeven functie.

$f'(x) = 12x^2 - 18x - 120$

Stap 2:
Los algebraïsch op: $f'(x) = 0$

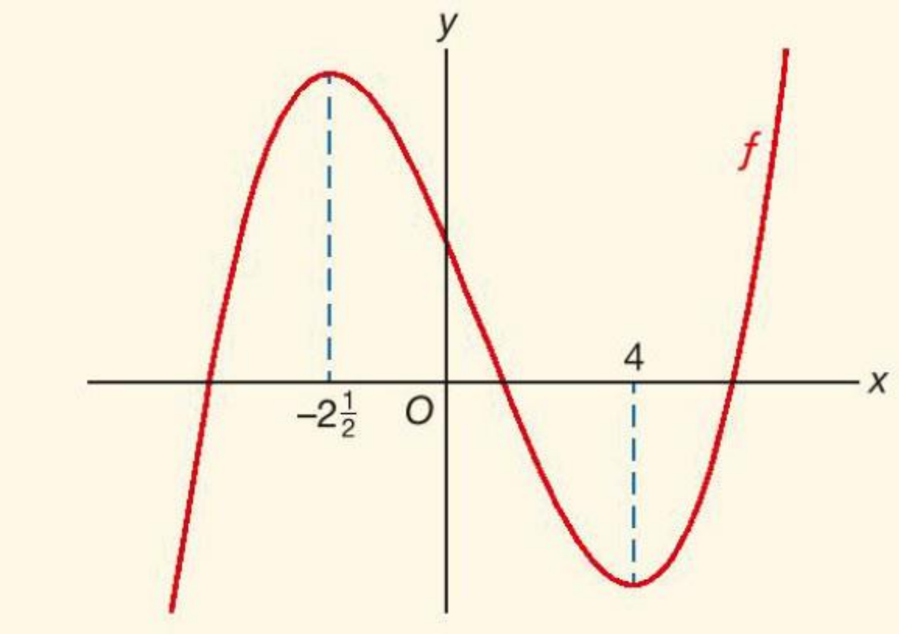
$12x^2 - 18x - 120 = 0$
$2x^2 - 3x - 20 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -20 = 169$

$$x = \frac{3-13}{4} = 2\tfrac{1}{2} \vee x = \frac{3+13}{4} = 4$$

6.1 Toppen en buigpunten [1]

Voorbeeld:
Gegeven is de functie $f(x) = 4x^3 – 9x^2 – 120x + 150$.
Bereken algebraïsch de extreme waarden van f.

Stap 3:
Plot de grafiek op je GR en maak een schets.
Controleer of je met een maximum of een minimum te doen hebt.



Stap 4:
Bereken de extreme waarden:

Maximum is $f(-2½) = 331¼$
Minimum is $f(4) = -218$

6.1 Toppen en buigpunten [2]

<u>Voorbeeld:</u>
Gegeven is de functie $f(x) = 2x^5 - 6x^3$
Toon met de afgeleide aan dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{4}{5}}$

<u>Stap 1:</u>
Bereken de afgeleide van de gegeven functie.

$f'(x) = 10x^4 - 18x^2$

<u>Stap 2:</u>
Laat met een berekening zien dat invullen van de gegeven waarde van x in de afgeleide 0 als uitkomst geeft.

$f'(\sqrt{1\frac{4}{5}}) =$

$10 \cdot \left(\sqrt{1\frac{4}{5}}\right)^4 - 18 \cdot \left(\sqrt{1\frac{4}{5}}\right)^2 =$

$10 \cdot \left(1\frac{4}{5}\right)^2 - 18 \cdot 1\frac{4}{5} =$

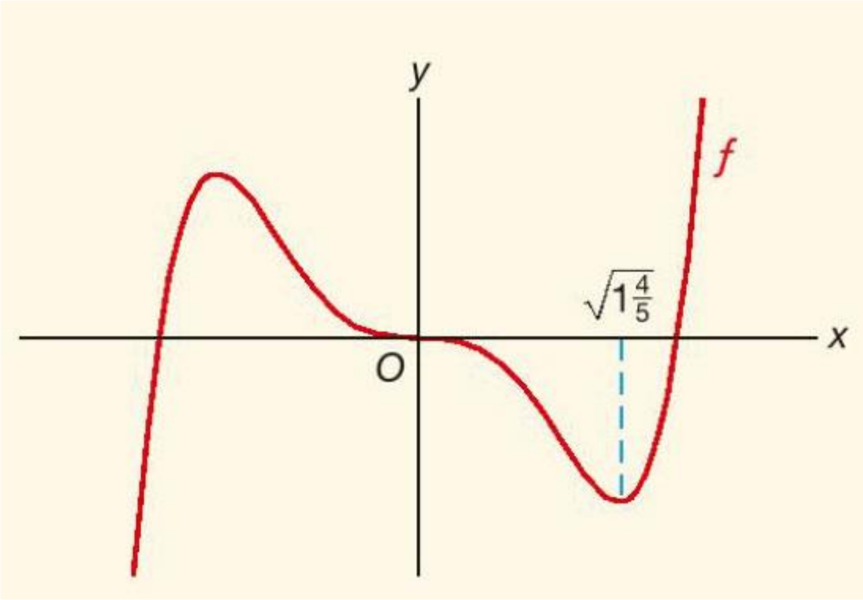
$10 \cdot \frac{81}{25} - \frac{162}{5} =$

$\frac{162}{5} - \frac{162}{5} = 0$

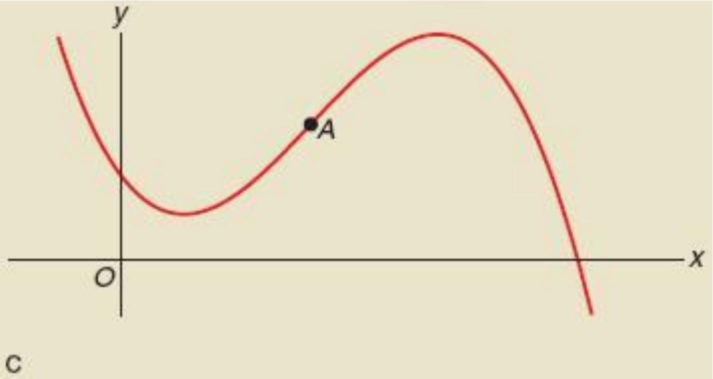
6.1 Toppen en buigpunten [2]

Voorbeeld:
Gegeven is de functie $f(x) = 2x^5 - 6x^3$
Toon met de afgeleide aan dat f een extreme waarde heeft voor $x = \sqrt{1\frac{4}{5}}$

Stap 3:
Maak met behulp van de GR een schets van de afgeleide en laat zien dat er bij de gegeven waarde van x ook echt sprake is van een extreme waarde.



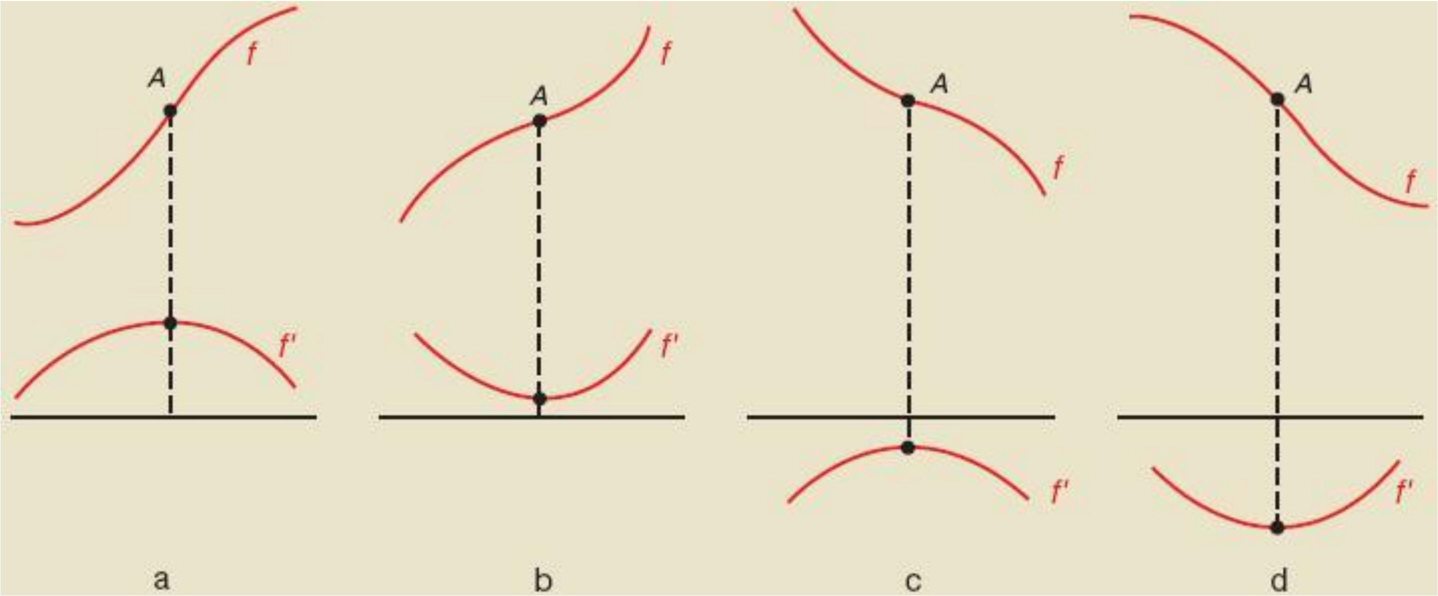
6.1 Toppen en buigpunten [3]



- De functie is afnemend dalend tot het lokale minimum;
- Vanaf het lokale minimum tot punt *A* is de functie toenemend stijgend;
- Vanaf punt *A* tot het lokale maximum is de functie afnemend stijgend;
- Vanaf het lokale maximum is de functie toenemend dalend.

Het punt *A* heet een zogenaamd **buigpunt**.

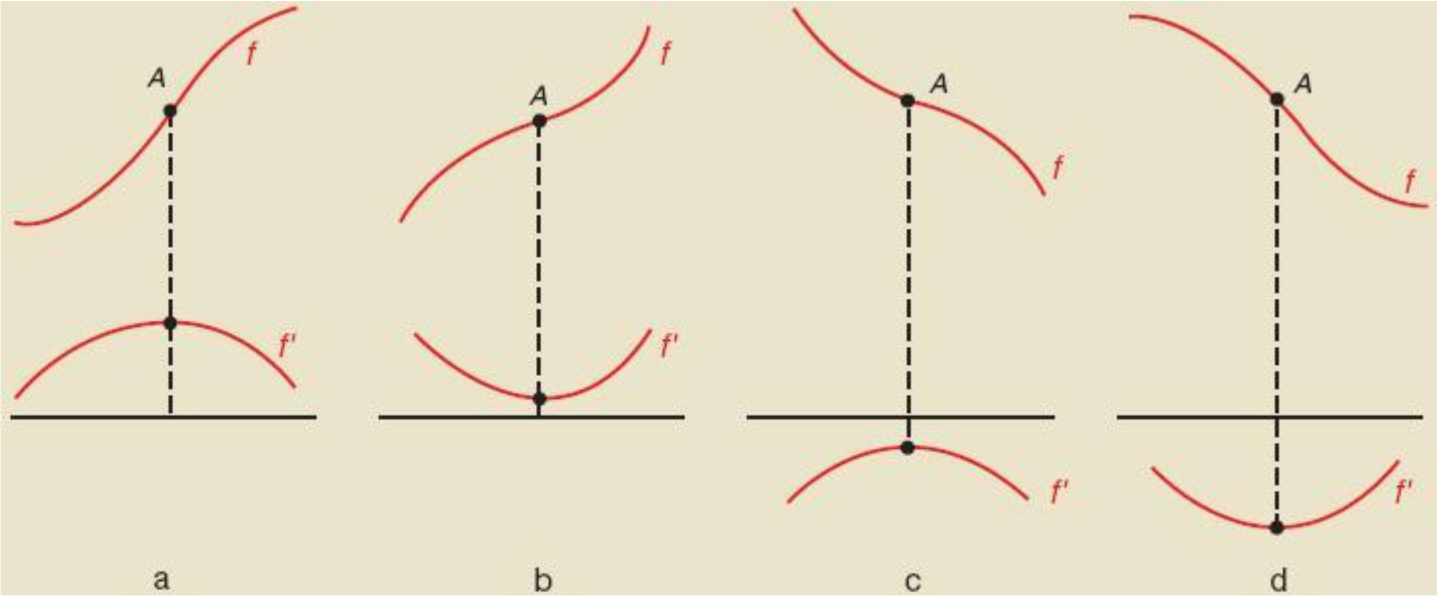
6.1 Toppen en buigpunten [3]



a: De grafiek is eerst toenemend stijgend en dan afnemend stijgend;
b: De grafiek is eerst afnemend stijgend en dan toenemend stijgend;
c: De grafiek is eerst afnemend dalend en dan toenemend dalend;
d: De grafiek is eerst toenemend dalend en dan afnemend dalend;

In al deze vier situaties is het punt *A* het buigpunt.

6.1 Toppen en buigpunten [3]



- Waar *f* een buigpunt heeft, heeft de afgeleide *f'* een maximum of minimum;
- Het buigpunt van een functie *f* kan gevonden worden door de extreme waarde van *f'* te berekenen;
- De extreme waarde van *f'* kan berekend worden door de afgeleide van *f'* gelijk te stellen aan nul;
- De afgeleide van *f'* is de functie *f''* (**tweede afgeleide**).

6.1 Toppen en buigpunten [3]

Voorbeeld:
Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 + 7x - 6$

Stap 1:
Bereken de eerste en tweede afgeleide van $f(x)$.

$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 7$ EN $f''(x) = x^2 - 6x + 9$

Stap 2:
Los de vergelijking $f''(x) = 0$ op

$x^2 - 6x + 9 = 0$
$(x - 3)^2 = 0$
$x - 3 = 0$
$x = 3$

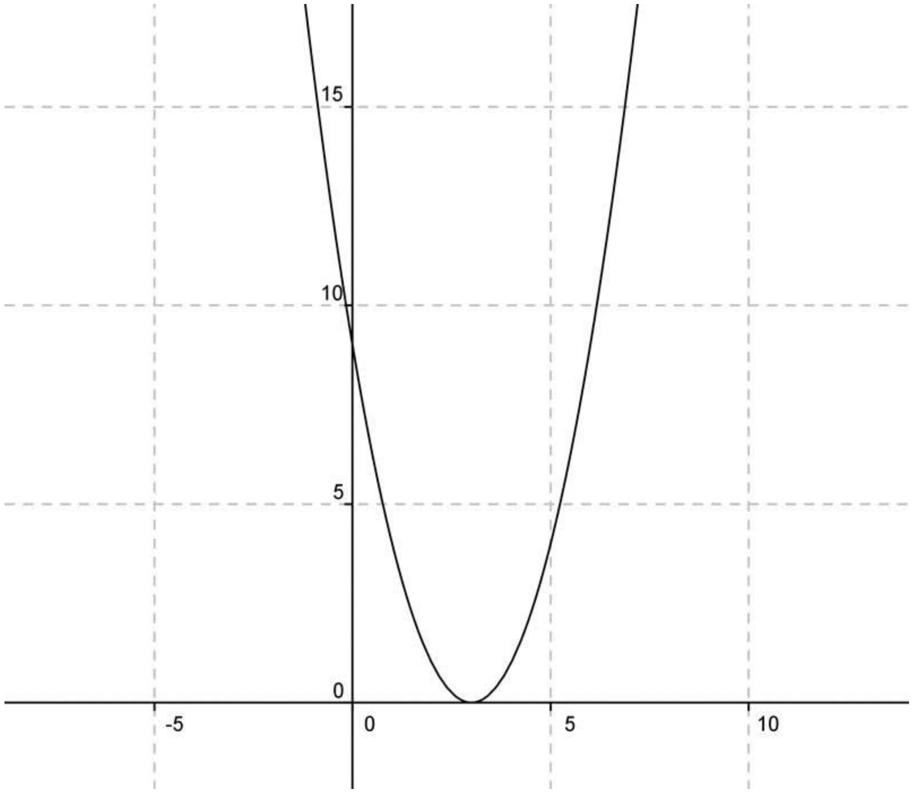
6.1 Toppen en buigpunten [3]

Voorbeeld:
Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 + 7x - 6$

Stap 3:
Maak met behulp van de GR een schets van de tweede afgeleide.

In het punt $x = 3$ verwisselt de tweede afgeleide niet van teken.
De oorspronkelijke functie heeft hier dus GEEN buigpunt.



6.2 De afgeleide van machtsfuncties [1]

Herhaling:
De afgeleide van $f(x) = ax^n$ is: $f'(x) = nax^{n-1}$

Deze regel geldt voor elk geheel getal n.

Voorbeeld 1:

$$f(x) = \frac{9}{x^3} = 9x^{-3}$$

$$f'(x) = -3 \cdot 9x^{-4} = -27x^{-4} = \frac{-27}{x^4}$$

Voorbeeld 2:

$$g(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^3} = x + \frac{2}{x^2} = x + 2x^{-2}$$

$$g'(x) = 1 - 2 \cdot 2x^{-3} = 1 - 4x^{-3} = 1 - \frac{4}{x^3}$$

6.2 De afgeleide van machtsfuncties [2]

Herhaling:
De afgeleide van $f(x) = ax^n$ is: $f'(x) = nax^{n-1}$

Deze regel geldt voor elk getal uit de verzameling van reële getallen IR

Voorbeeld 1:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Voorbeeld 2:

$$g(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^3} = x + \frac{2}{x^2} = x + 2x^{-2}$$

$$g'(x) = 1 - 2 \cdot 2x^{-3} = 1 - 4x^{-3} = 1 - \frac{4}{x^3}$$

6.3 De kettingregel [1]

Voorbeeld 1:
$f(x)$ =**schakels** $(x^2 - x + 6)^4$ is een **samengestelde functie,** die bestaat uit de $u(v) = v^4$ en $v(x) = x^2 - x + 6$.

Een functie de geschreven is als een ketting van schakels heeft een **kettingfunctie**.

Kettingregel:
$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

$u(v) = v^4$ heeft als afgeleide $u'(v) = 4v^3$
$v(x) = x^2 - x + 6$ heeft als afgeleide $v'(x) = 2x - 1$

De afgeleide van $(x^2 - x + 6)^4$ wordt nu:

$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = 4v^3 \cdot (2x - 1) = 4(x^2 - x + 6)(2x - 1)$

6.3 De kettingregel [1]

Voorbeeld 2:

Bereken de afgeleide van de gegeven functie $g(x)$:

$$g(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + x}} = 4(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u(v) = 4v^{-\frac{1}{2}} \; met \; u'(v) = -2v^{-1\frac{1}{2}}$$

$$v(x) = x^2 + x \; met \; v'(x) = 2x + 1$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(v) \cdot v'(x) \\ &= -2v^{-1\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) \\ &= -2(x^2 + x)^{-1\frac{1}{2}}(2x + 1) \\ &= \frac{-2(2x + 1)}{\left(x^2 + x\right)^{1\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-4x - 2}{(x^2 + x)\sqrt{x^2 + x}} \end{aligned}$$

6.3 De kettingregel [2]

Voorbeeld van combinatie kettingregel en productregel:

$f(x) = x\sqrt{2x+1}$

$f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]' \ (productregel)$

$[x]' = 1 \quad en \quad [g(x)]' = [\sqrt{2x+1}]'$

$u(v) = \sqrt{v} \quad met \quad u'(v) = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}$

$v(x) = 2x+1 \quad met \quad v'(x) = 2$

$[g(x)]' = u'(v) \cdot v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$f'(x) = [x]' \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot [\sqrt{2x+1}]'$

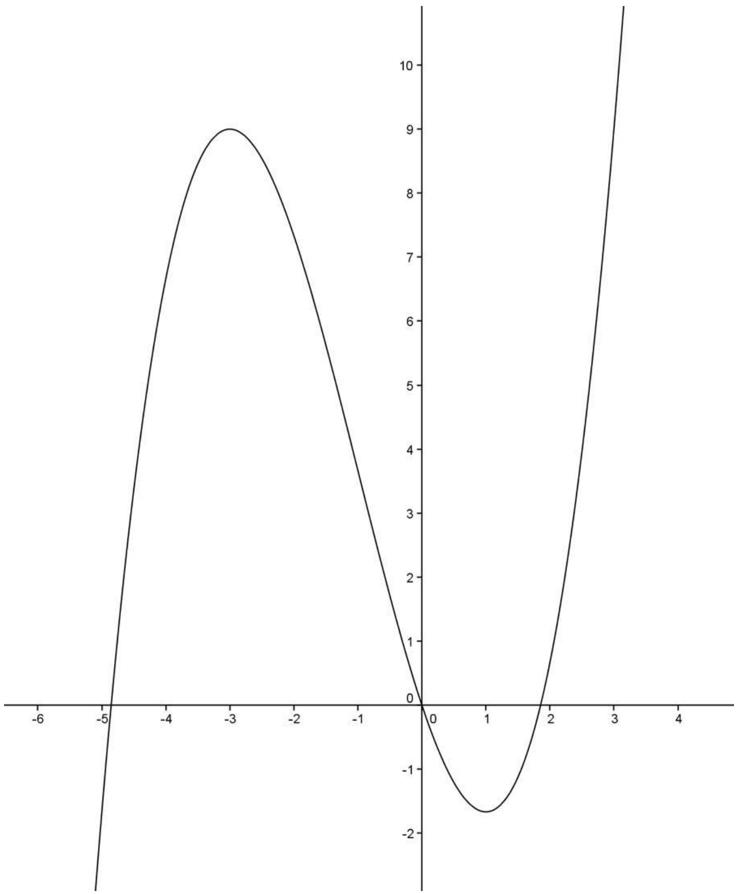
$= 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$= \sqrt{2x+1} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$

$= \dfrac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$

6.4 Toppen en snijpunten [1]

Voorbeeld:
Voor welke p heeft de vergelijking $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x = p$
- precies drie oplossingen
- precies twee oplossingen
- precies één oplossing



Uit het plaatje volgt nu:
- Een lijn boven het maximum leidt tot één snijpunt
- Een lijn door het maximum leidt tot twee snijpunten
- Een lijn tussen de toppen leidt tot drie snijpunten
- Een lijn door het minimum leidt tot twee snijpunten
- Een lijn onder het minimum leidt tot één snijpunt

<u>Dus:</u> Bereken de toppen van de grafiek.

6.4 Toppen en snijpunten [1]

Voorbeeld:
Voor welke *p* heeft de vergelijking $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x = p$
• precies drie oplossingen
• precies twee oplossingen
• precies één oplossing

Stap 1:
Stel de afgeleide van de gegeven functie op.

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$

Stap 2:
Stel de afgeleide gelijk aan 0 en los de vergelijking op.

$f'(x) = 0$
$x^2 + 2x - 3 = 0$
$(x + 3)(x - 1) = 0$
$x = -3 \vee x = 1$

6.4 Toppen en snijpunten [1]

Voorbeeld:

Voor welke p heeft de vergelijking $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x = p$

- precies drie oplossingen
- precies twee oplossingen
- precies één oplossing

Stap 3:

Bereken de extreme waarden:

Dit geeft de toppen (-3, 9) en $(1, -1\frac{2}{3})$.

Stap 4:

Lees de oplossing af uit de grafiek:

$p < -1\frac{2}{3}$ en $p > 9$ geeft één oplossing

$p = -1\frac{2}{3}$ en $p = 9$ geeft twee oplossingen

$-1\frac{2}{3} < p < 9$ geeft drie oplossingen

6.4 Toppen en snijpunten [2]

Voorbeeld:

Gegeven zijn de functies $f_p(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - px + 6$

Bereken voor welke p de functie twee extreme waarden heeft

Stap 1:

Geef de afgeleide functie: $f_p^{'}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - p$

Stap 2:

Als de functie twee extreme waarden heeft, betekent dit dat de vergelijking $f_p^{'}(x) = 0$ twee oplossingen heeft ($D > 0$)

Oplossing van $D > 0$ geeft de oplossingen:

$1 – 2p > 0$

$-2p > -1$

$p < ½$

6.4 Toppen en snijpunten [3]

Voorbeeld:
Gegeven is de functie $f_p(x) = x^2\sqrt{x} - p\sqrt{\text{x}}$
k: $y = 18x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.
Bereken p en q

Stap 1:
Bereken de afgeleide van de functie $f_p(x)$

$$f_p(x) = x^2\sqrt{x} + p\sqrt{x} = x^{2\frac{1}{2}} + p \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$f_p^{'}(x) = 2\tfrac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}px^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{5x\sqrt{x}}{2} + \frac{p}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{p}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + p}{2\sqrt{x}}$$

6.4 Toppen en snijpunten [3]

Voorbeeld:
Gegeven is de functie $f_p(x) = x^2\sqrt{x} - p\sqrt{x}$
k: $y = 18x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.
Bereken p en q

Stap 2:
Bereken p (Je weet dat de afgeleide van $f_p(x)$ in het punt A met $x_A = 4$ gelijk is aan 18).

$$f_p'(4) = 18$$

$$\frac{5 \cdot 4^2 + p}{2\sqrt{4}} = 18$$

$$\frac{80 + p}{4} = 18$$

$$80 + p = 72$$

$$p = -8$$

6.4 Toppen en snijpunten [3]

Voorbeeld:

Gegeven is de functie $f_p(x) = x^2\sqrt{x} - p\sqrt{x}$

k: $y = 18x + q$ raakt de grafiek van f_p in het punt A met $x_A = 4$.

Bereken p en q

Stap 3:

Bereken q (Bereken hiervoor de y-coördinaat van het punt A)

$f_{-8}(x) = x^2\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$

$f_{-8}(4) = 16$ dus $A(4, 16)$

$k : y = 18x + q$

$16 = 18 \cdot 4 + q$

$16 = 72 + q$

$q = -56$

$p = -8$ en $q = -56$

6.4 Toppen en snijpunten [4]

Voorbeeld:

$g_p(x) = px^2 + 4x - 3$

De top hangt af van de waarde van p. Je kunt een formule opstellen waarop alle toppen van de grafiek van g_p liggen.

Stap 1:

Stel de afgeleide van de gegeven functie op:

$g_p'(x) = 2px + 4$

Stap 2:

Stel de afgeleide gelijk aan nul en druk p uit in x.

$g_p'(x) = 0$

$2px + 4 = 0$

$2px = -4$

$$p = \frac{-2}{x}$$

6.4 Toppen en snijpunten [4]

Voorbeeld:
$g_p(x) = px^2 + 4x - 3$

De top hangt af van de waarde van p. Je kunt een formule opstellen waarop alle toppen van de grafiek van g_p liggen.

Stap 3:
Vul p als functie van x in, in $g_p(x)$ om de formule te krijgen van de kromme waarop alle toppen van de grafiek van g_p liggen.

$$y = px^2 + 4x - 3$$
$$= \frac{-2}{x} \cdot x^2 + 4x - 3$$
$$= -2x + 4x - 3$$
$$= 2x - 3$$

Alle toppen van $g_p(x) = px^2 + 4x - 3$ liggen op de lijn $y = 2x - 3$