CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum:	3 juni 2014
Tijd:	14.00 - 17.00 uur
Aantal opgaven:	7

Zet uw naam op alle in te leveren blaadjes.

Laat bij elke opgave door middel van een redenering, een berekening of een toelichting op het gebruik van de grafische rekenmachine zien hoe het antwoord verkregen is. Als deze ontbreekt worden voor het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen tipp-ex o.i.d.. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een (grafische) rekenmachine van een type dat goedgekeurd is voor het Centraal Examen Wiskunde van het vwo. Overige hulpmiddelen, zoals formulekaart, BINAS en tabellenboek zijn NIET toegestaan. Op pagina 5 is een lijst van formules afgedrukt; op de laatste drie pagina's vindt u tabellen van de binomiale en de normale kansverdeling.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden.

Op www.ccvx.nl vindt u vanaf begin volgende week:

- de uitwerkingen van dit tentamen;
- de stand van zaken van de correctie van het tentamen.

U wordt dringend verzocht om de Open Universiteit niet te bellen of te mailen over uw uitslag. Deze wordt zo spoedig mogelijk naar u opgestuurd.

Te behalen punten per onderdeel:							
Opgave	1	2	3	4	5	6	7
a	6	3	6		3	3	3
b	3	3	5		3	5	4
c	4	5	4		3	2	3
d			5			4	1
e							5
Totaal	13	11	20	7	9	14	16

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

1 Groeimodellen

In de tabel hieronder ziet u het aantal inwoners van land L in miljoenen (N), telkens gemeten op 1 januari.

jaar	1960	1970	1985	2010
N	10,24	12,80	17,89	31,25

6 pt **a** Onderzoek of er bij deze tabel een lineair dan wel een exponentieel groeimodel past en geef de bijbehorende groeiformule. Neem in deze formule $t = 0$ op 1 januari 1960.

Op 1 januari 1960 had provincie P 500.000 inwoners. Dit aantal was op 1 januari 2000 gegroeid tot 800.000.
Neem aan dat het aantal inwoners van provincie P exponentieel groeit.

3 pt **b** Bereken het groeipercentage over een jaar van het aantal inwoners van provincie P. Geef het antwoord afgerond op twee cijfers achter de decimale komma.

De tijd in jaren waarin het aantal inwoners van provincie P verdubbelt, kan worden geschreven worden als $t = A \cdot {}^{b}\log c$.

4 pt **c** Bepaal passende waarden voor A, b en c in deze formule en bereken de verdubbelingstijd in jaren nauwkeurig.

2 Dagtemperatuur

In een bepaald gebied wordt de gemiddelde dagtemperatuur in een schrikkeljaar gegeven door de formule

$$T = 7 - 12\sin\left(\frac{2\pi}{366}(t+59)\right)$$

(T in graden Celsius; t is het dagnummer met $t = 1$ op 1 januari).

3 pt **a** Ligt dit gebied op het Noordelijk of op het Zuidelijk halfrond?
Motiveer uw antwoord!

3 pt **b** Laat met een exacte berekening zien dat $T = 7$ op 3 mei.

Op 2 juni is de gemiddelde dagtemperatuur volgens de bovenstaande formule gelijk aan $7 - 12 \cdot \sin(1{,}1639\pi) \approx 13°C$.

5 pt **c** Gebruik de evenwichtsstand van bovenstaande functie om te bepalen hoeveel dagen voor of na 2 juni de gemiddelde dagtemperatuur ook gelijk is aan 13°C.

3 De dagopbrengst van een supermarkt

Voor de nieuw geopende supermarkt S is een model gemaakt voor de verwachte dagopbrengst:

$$D(t) = \frac{3t + 10}{2t + 10}$$

In deze formule is $D(t)$ de verwachte dagopbrengst in tienduizenden euro's en t de tijd in maanden, gerekend vanaf de opening.

Uit onderzoek is bekend dat de dagopbrengst van een winkel na de opening vaak eerst toeneemt en daarna afvlakt totdat een zeker maximaal niveau is bereikt

6 pt **a** Toon met behulp van de afgeleide functie aan dat de dagopbrengst van supermarkt S volgens bovenstaande formule inderdaad stijgt, maar dat er na verloop van tijd praktisch gesproken geen sprake meer is van stijging.

5 pt **b** Bereken algebraïsch hoeveel tijd na de opening de dagopbrengst volgens deze formule gelijk is aan 14.500 euro.

Door een prijzenoorlog daalt de dagopbrengst, maar na verloop van tijd komt deze weer terug op het niveau dat deze volgens de eerder gegeven formule heeft. Het effect van de prijzenoorlog wordt weergegeven door de formule

$$V(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$$

In deze formule is $V(t)$ de vermindering van de dagopbrengst in duizenden euro's ten opzichte van de eerder gegeven formule en is t de tijd in maanden met $t = 0$ op het moment dat de prijzenoorlog uitbreekt. De formule geldt alleen zolang deze vermindering positief is.

4 pt **c** Bereken algebraïsch hoe lang de prijzenoorlog effect heeft. Geef het antwoord afgerond op 1 cijfer achter de decimale komma.

5 pt **d** Bereken algebraïsch het tijdstip waarop het effect van de prijzenoorlog op de dagopbrengst het grootst is.

7 pt 4 Een raaklijn

Gegeven de functie $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

Stel algebraïsch de vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (2,3).

5 Gratis posters

Bij een reclame-actie van een benzinemerk wordt bij elke tankbeurt gratis een poster van een voetbalheld gegeven. Er zijn 10 verschillende posters. Welke poster je krijgt, is door de verpakking niet te zien. De voorraad posters is zo groot, dat kan worden aangenomen dat de ontvanger bij iedere tankbeurt gelijke kansen heeft op elk van de tien posters.

3 pt **a** Bereken de kans dat een automobilist na vier keer tanken vier verschillende posters heeft gekregen.

Twee van de voetbalhelden zijn Lionel Messi en Christiano Ronaldo.

3 pt **b** Bereken de kans dat een automobilist na vier keer tanken precies twee posters van Messi heeft, maar nog geen poster van Ronaldo.

Aan het eind van de actie heeft een automobilist 18 posters verzameld, waaronder 4 van Messi. Omdat hij zelf niet zo'n voetbalfan is, heeft hij de posters weer teruggedaan in de verpakking, zodat aan de buitenkant nog steeds niet te zien is om welke voetbalheld het gaat. Hij heeft zes vrienden die wel van voetbal houden en hij geeft elk van deze zes vrienden drie van deze posters, die hij lukraak uitkiest. Eén van die vrienden is een grote fan van Barcelona.

3 pt **c** Bereken de kans dat deze vriend tenminste één poster van Lionel Messi krijgt.

6 Pijptabak

De firma Aldemeier verpakt pijptabak in pakjes. Het gewicht van de tabak in deze pakjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 52 gram en een standaardafwijking van 2 gram.

3 pt **a** Hoeveel procent van deze pakjes bevat minder dan 50 gram tabak? Geef het antwoord afgerond op twee cijfers achter de decimale komma.

In een slof gaan twintig pakjes. Het gewicht van de verpakking van zo'n slof is normaal verdeeld met $\mu = 5$ gram en $\sigma = 1$ gram.

5 pt **b** Bereken de kans dat een slof (verpakking + 20 pakjes) meer dan 1025 gram weegt. Geef het antwoord afgerond op drie cijfers achter de decimale komma.

Bij een kwaliteitscontrole wordt vastgesteld dat 1% van de pakjes een te laag gewicht heeft.

2 pt **c** Bereken tot welke grens het gewicht van de pakjes te laag is. Geef het antwoord in honderdste grammen nauwkeurig.

Bij deze kwaliteitscontrole wordt het gewicht van 50 pakjes van deze tabak bepaald.

4 pt **d** Bereken de kans dat meer dan 3 van deze pakjes een te laag gewicht hebben. Geef het antwoord afgerond op vier cijfers achter de decimale komma.

7 Zwartrijden

Frans reist regelmatig met de trein tussen Utrecht en Woerden. Omdat hij niet vaak gecontroleerd wordt, koopt hij nooit een kaartje, maar betaalt hij als hij wel gecontroleerd wordt, netjes de boete van 35 euro. De normale prijs van een kaartje is 3,50 euro (enkele reis), dus als hij gecontroleerd wordt, moet hij 38,50 euro betalen.

Op een zekere dag gaat Frans in de ochtendspits van Utrecht naar Woerden. De kans op controle in deze trein is gelijk aan 0,05. 's Middags reist hij van Woerden naar Utrecht. In deze trein is de kans op controle gelijk aan 0,1. Deze kansen zijn onafhankelijk van elkaar.

3 pt **a** Bereken de kans dat Frans deze dag niet gecontroleerd wordt.

4 pt **b** Bereken de verwachtingswaarde van het bedrag dat Frans in totaal moet betalen voor deze heen- en terugreis.

3 pt **c** Wat zou u op grond van uw berekening bij vraag b aan Frans adviseren voor zijn treinreizen van deze dag: Geen kaartjes kopen, wel kaartjes kopen of weet u nog een andere optie?
Motiveer uw antwoord met een berekening!

Frans reist ook regelmatig met de trein tussen Utrecht en Arnhem. Op *Twitter* beweert hij, dat hij op dit traject in 15% van de gevallen gecontroleerd wordt. Een woordvoerder van de spoorwegen zegt, dat er op dit traject vaker gecontroleerd wordt. Ze besluiten dit te toetsen door op 20 ritten tussen Utrecht en Arnhem te noteren of Frans gecontroleerd wordt. Deze ritten worden willekeurig gekozen, dus u mag er ook hier van uitgaan dat de kansen om gecontroleerd te worden onafhankelijk zijn van elkaar. Frans en de NS spreken een significantieniveau af van $\alpha = 5\%$.

1 pt **d** Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

5 pt **e** Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure als Frans op 6 van deze 20 ritten gecontroleerd wordt?

Lijst van formules voor het voortentamen Wiskunde A

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen X en Y geldt: $\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$ Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$
$\sqrt{n}$-wet: Bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X: $\mathrm{E}(S)=n\cdot\mathrm{E}(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$ $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \quad \text{met } k=0,1,2,\dots,n$$

Verwachting: $\mathrm{E}(X)=n\cdot p$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \text{ is standaard normaal verdeeld en } P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$$

Differentiëren

naam van de regel	**functie**	**afgeleide**
Somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
Productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\dfrac{dk}{dx}=\dfrac{df}{dg}\cdot\dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	**voorwaarden**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log \dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Rijen

Rekenkundige rij:	Som $=\frac{1}{2}\cdot$ aantal termen $\cdot\,(u_e+u_l)$
Meetkundige rij:	Som $=\dfrac{u_{l+1}-u_e}{r-1}$ $(r\neq 1)$
In beide formules geldt:	e = rangnummer eerste term; l = rangnummer laatste term.

CUMULATIEVE BINOMIALE VERDELINGEN (vervolg)

Verdelingsfunctie $B_{n,p}(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{k=x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

n	x	p: 0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

CUMULATIEVE BINOMIALE VERDELINGEN (vervolg)

n	x	p: 0,5500	0,6000	0,6500	0,7000	0,7500	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500	1/6	1/3	2/3	5/6
10	0	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1615	0,0173	0,0000	0,0000
	1	0,0045	0,0017	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,4845	0,1040	0,0004	0,0000
	2	0,0274	0,0123	0,0048	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,7752	0,2991	0,0034	0,0000
	3	0,1020	0,0548	0,0260	0,0106	0,0035	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,9303	0,5593	0,0197	0,0003
	4	0,2616	0,1662	0,0949	0,0473	0,0197	0,0064	0,0014	0,0001	0,0000	0,9845	0,7869	0,0766	0,0024
	5	0,4956	0,3669	0,2485	0,1503	0,0781	0,0328	0,0099	0,0016	0,0001	0,9976	0,9234	0,2131	0,0155
	6	0,7340	0,6177	0,4862	0,3504	0,2241	0,1209	0,0500	0,0128	0,0010	0,9997	0,9803	0,4407	0,0697
	7	0,9004	0,8327	0,7384	0,6172	0,4744	0,3222	0,1798	0,0702	0,0115	1,0000	0,9966	0,7009	0,2248
	8	0,9767	0,9536	0,9140	0,8507	0,7560	0,6242	0,4557	0,2639	0,0861	1,0000	0,9996	0,8960	0,5155
	9	0,9975	0,9940	0,9865	0,9718	0,9437	0,8926	0,8031	0,6513	0,4013	1,0000	1,0000	0,9827	0,8385
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

CUMULATIEVE BINOMIALE VERDELINGEN (vervolg)

Verdelingsfunctie $B_{n,p}(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{k=x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

n	x	p: 0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
20	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
	3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
	4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
	5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
	6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
	7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
	8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
	9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

CUMULATIEVE BINOMIALE VERDELINGEN (vervolg)

n	x	p: 0,5500	0,6000	0,6500	0,7000	0,7500	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500	1/6	1/3	2/3	5/6
20	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0261	0,0003	0,0000	0,0000
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1304	0,0033	0,0000	0,0000
	2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3287	0,0176	0,0000	0,0000
	3	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5665	0,0604	0,0000	0,0000
	4	0,0015	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,7687	0,1515	0,0000	0,0000
	5	0,0064	0,0016	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,8982	0,2972	0,0002	0,0000
	6	0,0214	0,0065	0,0015	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9629	0,4793	0,0009	0,0000
	7	0,0580	0,0210	0,0060	0,0013	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9887	0,6615	0,0037	0,0000
	8	0,1308	0,0565	0,0196	0,0051	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,9972	0,8095	0,0130	0,0000
	9	0,2493	0,1275	0,0532	0,0171	0,0039	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,9994	0,9081	0,0376	0,0001
	10	0,4086	0,2447	0,1218	0,0480	0,0139	0,0026	0,0002	0,0000	0,0000	0,9999	0,9624	0,0919	0,0006
	11	0,5857	0,4044	0,2376	0,1133	0,0409	0,0100	0,0013	0,0001	0,0000	1,0000	0,9870	0,1905	0,0028
	12	0,7480	0,5841	0,3990	0,2277	0,1018	0,0321	0,0059	0,0004	0,0000	1,0000	0,9963	0,3385	0,0113
	13	0,8701	0,7500	0,5834	0,3920	0,2142	0,0867	0,0219	0,0024	0,0000	1,0000	0,9991	0,5207	0,0371
	14	0,9447	0,8744	0,7546	0,5836	0,3828	0,1958	0,0673	0,0113	0,0003	1,0000	0,9998	0,7028	0,1018
	15	0,9811	0,9490	0,8818	0,7625	0,5852	0,3704	0,1702	0,0432	0,0026	1,0000	1,0000	0,8485	0,2313
	16	0,9951	0,9840	0,9556	0,8929	0,7748	0,5886	0,3523	0,1330	0,0159	1,0000	1,0000	0,9396	0,4335
	17	0,9991	0,9964	0,9879	0,9645	0,9087	0,7939	0,5951	0,3231	0,0755	1,0000	1,0000	0,9824	0,6713
	18	0,9999	0,9995	0,9979	0,9924	0,9757	0,9308	0,8244	0,6083	0,2642	1,0000	1,0000	0,9967	0,8696
	19	1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9968	0,9885	0,9612	0,8784	0,6415	1,0000	1,0000	0,9997	0,9739
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

CUMULATIEVE BINOMIALE VERDELINGEN (vervolg)

Verdelingsfunctie $B_{n,p}(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{k=x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

n	x	p = 0,0100	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
50	0	0,6050	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9106	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9862	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9984	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9999	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	1,0000	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9968	0,8779	0,5188	0 1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
	8	1,0000	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0 0025	0,0002	0,0000	0,0000
	9	1,0000	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000
	10	1,0000	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000
	11	1,0000	1,0000	0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000
	12	1,0000	1,0000	0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002
	13	1,0000	1,0000	0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005
	14	1,0000	1,0000	0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013
	15	1,0000	1,0000	1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033
	16	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077
	17	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164
	18	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439
	25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561
	26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641
	27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601
	28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389
	29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9966	0,9765	0,8987
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9884	0,9405
	31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9947	0,9675
	32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9836
	33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9923
	34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967
	35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987
	36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
	37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	39	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	40	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	41	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	42	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	43	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	44	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	45	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	46	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	47	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	49	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

CUMULATIEVE BINOMIALE VERDELINGEN (vervolg)

n	x	p = 0,5500	0,6000	0,6500	0,7000	0,7500	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500	0,9900	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
50	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0066	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0238	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0643	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1388	0,0001	0,0000	0,0000
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2506	0,0005	0,0000	0,0000
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3911	0,0017	0,0000	0,0000
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,5421	0,0050	0,0000	0,0000
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,6830	0,0127	0,0000	0,0000
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,7986	0,0284	0,0000	0,0000
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,8827	0,0570	0,0000	0,0000
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9373	0,1035	0,0000	0,0000
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9693	0,1715	0,0000	0,0000
	14	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9862	0,2612	0,0000	0,0000
	15	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9943	0,3690	0,0000	0,0000
	16	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9978	0,4868	0,0000	0,0000
	17	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9992	0,6046	0,0000	0,0000
	18	0,0053	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9997	0,7126	0,0000	0,0000
	19	0,0116	0,0014	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9999	0,8036	0,0000	0,0000
	20	0,0235	0,0034	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,8741	0,0001	0,0000
	21	0,0444	0,0076	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,9244	0,0003	0,0000
	22	0,0780	0,0160	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,9576	0,0008	0,0000
	23	0,1279	0,0314	0,0045	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,9778	0,0021	0,0000
	24	0,1966	0,0573	0,0100	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,9892	0,0049	0,0000
	25	0,2840	0,0978	0,0207	0,0024	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,9951	0,0108	0,0000
	26	0,3866	0,1562	0,0396	0,0056	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,9979	0,0222	0,0000
	27	0,4981	0,2340	0,0710	0,0123	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,9992	0,0424	0,0000
	28	0,6100	0,3299	0,1187	0,0251	0,0026	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,9997	0,0756	0,0000
	29	0,7138	0,4390	0,1861	0,0478	0,0063	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,9999	0,1259	0,0000
	30	0,8026	0,5535	0,2736	0,0848	0,0139	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,1964	0,0001
	31	0,8727	0,6644	0,3784	0,1406	0,0287	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,2874	0,0003
	32	0,9235	0,7631	0,4940	0,2178	0,0551	0,0063	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,3954	0,0008
	33	0,9573	0,8439	0,6111	0,3161	0,0983	0,0144	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,5132	0,0022
	34	0,9780	0,9045	0,7199	0,4308	0,1631	0,0308	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,6310	0,0057
	35	0,9896	0,9460	0,8122	0,5532	0,2519	0,0607	0,0053	0,0001	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,7388	0,0138
	36	0,9955	0,9720	0,8837	0,6721	0,3630	0,1106	0,0132	0,0003	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,8285	0,0307
	37	0,9982	0,9867	0,9339	0,7771	0,4890	0,1861	0,0301	0,0010	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,8965	0,0627
	38	0,9994	0,9943	0,9658	0,8610	0,6184	0,2893	0,0628	0,0032	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,9430	0,1173
	39	0,9998	0,9978	0,9840	0,9211	0,7378	0,4164	0,1199	0,0094	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,9716	0,2014
	40	0,9999	0,9992	0,9933	0,9598	0,8363	0,5563	0,2089	0,0245	0,0002	0,0000	1,0000	1,0000	0,9873	0,3170
	41	1,0000	0,9998	0,9975	0,9817	0,9084	0,6927	0,3319	0,0579	0,0008	0,0000	1,0000	1,0000	0,9950	0,4579
	42	1,0000	0,9999	0,9992	0,9927	0,9547	0,8096	0,4812	0,1221	0,0032	0,0000	1,0000	1,0000	0,9983	0,6089
	43	1,0000	1,0000	0,9998	0,9975	0,9806	0,8966	0,6387	0,2298	0,0118	0,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,7494
	44	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9930	0,9520	0,7806	0,3839	0,0378	0,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,8612
	45	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9979	0,9815	0,8879	0,5688	0,1036	0,0001	1,0000	1,0000	1,0000	0,9357
	46	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9943	0,9540	0,7497	0,2396	0,0016	1,0000	1,0000	1,0000	0,9762
	47	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9858	0,8883	0,4595	0,0138	1,0000	1,0000	1,0000	0,9934
	48	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9971	0,9662	0,7206	0,0894	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988
	49	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9948	0,9231	0,3950	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

DE STANDAARD-NORMALE VERDELING

Verdelingsfunctie $\Phi(z) = P(Z \leqq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
−0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
−0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
−0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
−0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
−0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
−0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
−0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
−0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
−0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
−1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
−1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
−1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
−1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
−1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
−1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
−1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
−1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
−1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0303	0,0301	0,0294
−1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
−2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
−2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
−2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
−2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
−2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
−2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
−2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
−2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
−2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
−2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
−3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
−3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
−3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
−3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
−3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
−3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
−3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

DE STANDAARD-NORMALE VERDELING (vervolg)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Overschrijdingskansen (één-, resp. tweezijdig)

z	0,675	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090
$P(Z > z)$	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
$P(\lvert Z \rvert > z)$	0.50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002

Opgave 1a

- ⋆ Bij lineaire groei is de uitkomst van het differentiequotënt $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}$ voor ieder tweetal punten in de tabel hetzelfde. Dit is hier niet het geval, dus past er geen lineair groeimodel.
  Dit kun je ook zien door de formule op te stellen voor de rechte lijn door $(0, 10{,}24)$ en $(10, 12{,}80)$ en te constateren dat de overige punten uit de tabel niet op deze lijn liggen.
- ⋆ Bij exponentiële groei past een formule van de vorm $N(t) = b \cdot g^t$ met $b = N(0) = 10{,}24$.
- ⋆ De groeifactor over 10 jaar is $g_{10} = \dfrac{N(10)}{N(0)} = \dfrac{12{,}80}{10{,}24} = 1{,}25$.
- ⋆ Dit geeft als groeiformule $N(t) = 10{,}24 \cdot 1{,}25^t$ met 10 jaar als tijdseenheid.
- ⋆ We moeten nog wel controleren of dit model past bij de tabel.
- ⋆ In 1985 geldt $t = 2{,}5$ en in 2010 geldt $t = 5$.
- ⋆ Dit geeft $N(2{,}5) = 10{,}24 \cdot 1{,}25^{2{,}5} \approx 17{,}8885$ en $N(5) = 10.24 \cdot 1{,}25^5 = 31{,}25$.
  Deze aantallen kloppen, dus past het exponentiële groeimodel inderdaad bij de tabel.

Alternatief voor de laatste vier stappen:

- ⋆ De groeifactor over één jaar is dan $g_1 = g_{10}^{1/10} = 1{,}25^{1/10} = \sqrt[10]{1{,}25}$.
- ⋆ Dit geeft de groeiformule $N(t) = 10{,}24 \cdot \left(1{,}25^{1/10}\right)^t = 10{,}24 \cdot 1{,}25^{t/10}$
  of $N(t) = 10{,}24 \cdot \left(\sqrt[10]{1{,}25}\right)^t$ met t in jaren.
- ⋆ Om te controleren dat dit klopt met de tabel berekenen we
  $N(25) = 10{,}24 \cdot 1{,}25^{25/10} \approx 17{,}8885$ en $N(50) = 10{,}24 \cdot 1{,}25^{50/10} = 31{,}25$.
  Zo krijgen we inderdaad de tabelwaarden voor 1985 en 2010.

Opgave 1b

- ⋆ De groeifactor over 40 jaar is $\dfrac{800.000}{500.000} = 1{,}6$.
- ⋆ De groeifactor over 1 jaar is dus $1{,}6^{1/40} \approx 1{,}0118$.
- ⋆ Dit komt overeen met een groei van $100 \times (1{,}0118 - 1) = 1{,}18\%$ per jaar.

Opgave 1c

- ⋆ De groeifactor over 40 jaar is 1,6.
- ⋆ Voor de verdubbelingstijd T met 40 jaar als tijdseenheid geldt dus $1{,}6^T = 2$.
- ⋆ Dit geeft $T = {}^{1{,}6}\log 2$
- ⋆ Omdat de tijd in jaren 40 keer zo groot is, volgt $A = 40$, $b = 1{,}6$ en $c = 2$.
- ⋆ Dit geeft $t = 40 \cdot {}^{1{,}6}\log 2 \approx 59$ jaar.

Alternatief:

- ⋆ De groeifactor over 1 jaar is $1{,}6^{1/40} \approx 1{,}0118$.
- ⋆ Voor de verdubbelingstijd t in jaren geldt dus $1{,}0118^t = 2$.
- ⋆ Dit geeft $t = {}^{1{,}0118}\log 2$
- ⋆ Hieruit volgt $A = 1$, $b \approx 1{,}0118$ en $c = 2$.
- ⋆ Dit geeft $t = {}^{1{,}0118}\log 2 \approx 59$ jaar.

Opgave 2a

- ⋆ Op 1 januari geldt $T = 7 - 12\sin\left(\dfrac{2\pi}{366}\cdot 60\right) \approx 7 - 12\sin(1{,}03) \approx -3°\text{C}$

  Een half jaar later geldt $T = 7 - 12\sin\left(\dfrac{2\pi}{366}\cdot(184+59)\right) \approx 7 - 12\sin(4{,}17) \approx 17°\text{C}$
- ⋆ Aangezien de gemiddelde temperatuur op 1 januari lager is dan op 1 juli, ligt het gebied in het Noordelijk halfrond.

Opgave 2b

- ⋆ Op 30 april geldt $t = 31 + 29 + 31 + 30 = 121$. Op 3 mei geldt dus $t = 121 + 3 = 124$.
- ⋆ Dit geeft $T = 7 - 12\sin\left(\dfrac{2\pi}{366}\cdot(124+59)\right) = 7 - 12\sin\left(\frac{2\cdot 183}{366}\cdot\pi\right) = 7 - 12\sin(\pi)$
- ⋆ Aangezien $\sin(\pi) = 0$ volgt hieruit $T = 7$.

Opgave 2c

- ⋆ Op 3 mei bereikt T de evenwichtsstand van 7.
- ⋆ Omdat de periode van deze functie 366 dagen is, wordt deze evenwichtsstand ook $\dfrac{366}{2} = 183$ dagen later bereikt.
- ⋆ 2 juni is 30 dagen na 3 mei, dus 30 dagen voor de dag dat de temperatuur weer 7°C is, is deze weer 13°C.
- ⋆ Dat is $183 - 2\times 30 = 123$ dagen na 2 juni.

Opgave 3a

- ⋆ $D(t) = \dfrac{f(t)}{g(t)}$ met $f(t) = 3t + 10$ en $g(t) = 2t + 10$.
- ⋆ Dit geeft $D'(t) = \dfrac{3\cdot(2t+10) - (3t+10)\cdot 2}{(2t+10)^2}$.
- ⋆ $3(2t+10) - 2(3t+10) = 6t + 30 - 6t - 20 = 10$, dus $D'(t) = \dfrac{10}{(2t+10)^2}$.
- ⋆ Voor $t \geq 0$ is de noemer van deze formule positief, dus geldt $D'(t) > 0$.
- ⋆ Hieruit volgt dat $D(t)$ stijgend is voor $t \geq 0$.
- ⋆ Als t groot wordt, wordt de noemer van de afgeleide nog veel groter.
  De afgeleide wordt dan vrijwel 0, dus de dagopbrengst stijgt dan praktisch gesproken niet meer.

Opgave 3b

- ⋆ Bij een dagopbrengst van 14.500 euro geldt $D = \dfrac{14.500}{10.000} = 1{,}45$.
- ⋆ $D(t) = 1{,}45$ geeft $\dfrac{3t+10}{2t+10} = 1{,}45$, ofwel $3t + 10 = 1{,}45\cdot(2t+10)$.
- ⋆ Hieruit volgt $3t + 10 = 2{,}9t + 14{,}5 \Leftrightarrow 0{,}1t = 4{,}5 \Leftrightarrow t = 45$.

Opgave 3c

- ⋆ Als de prijs weer op het niveau van de eerste formule is, dan geldt
  $V(t) = 0 \Leftrightarrow -t^3 + 3t^2 + 9t = 0$.
- ⋆ Dit geeft $-t = 0$ of $t^2 - 3t - 9 = 0$
- ⋆ Hieruit volgt $t = 0$ of $t = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 4 \cdot 9}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$.
- ⋆ De enige positieve oplossing is $t = \dfrac{3 + \sqrt{45}}{2} \approx 4{,}9$.
  Het effect van de prijzenoorlog duurt dus 4,9 maanden.

Opgave 3d

- ⋆ $V'(t) = -3t^2 + 6t + 9$
- ⋆ $V'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$
- ⋆ Dit geeft $(t - 3)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 3$ of $t = -1$.
- ⋆ Aangezien de formule alleen geldt voor $t > 0$ is de enige oplossing $t = 3$.
  De prijzenoorlog heeft dus 3 maanden na de start het meeste effect.

Opgave 4

- ⋆ Schrijf f als $y = \sqrt{u}$ met $u = x^2 + 5$.
  Dit geeft $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ en $\dfrac{du}{dx} = 2x$.
- ⋆ De kettingregel geeft dan $f'(x) = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$.
- ⋆ We zoeken dus de vergelijking van de rechte lijn door het punt (2,3)
  met helling $f'(2) = \dfrac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.
- ⋆ In $y = ax + b$ kunnen we dus invullen $y = 3$, $a = \frac{2}{3}$ en $x = 2$.
  Dit geeft $3 = \frac{4}{3} + b$, dus $b = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.
- ⋆ De vergelijking is dus $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Opgave 5a

- ⋆ Het totaal aantal mogelijke uitkomsten bij vier eer trekken van een poster uit 10, waarbij alle gelijke kans hebben, is 10^4.
- ⋆ Het aantal ”gunstige” mogelijkheden voor vier verschillende is $10 \times 9 \times 8 \times 7$.
- ⋆ De kans op vier verschillende is dus $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0{,}504$

Opgave 5b

- ⋆ De kans op een poster van Messi is bij iedere tankbeurt 0,1.
  De kans op een poster van een andere voetbalheld dan Ronaldo of Messi, is bij iedere tankbeurt gelijk aan 0,8.
  De kans dat hij de eerste twee keer Messi krijgt en de laatste twee keer een ander is $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8$.
- ⋆ Er zijn $\binom{4}{2}$ mogelijke volgordes waarin hij 2 keer Messi en twee keer een ander krijgt.
- ⋆ De gevraagde kans is dus $\binom{4}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}8^2 = 6 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}64 = 0{,}0384$

Opgave 5c

- ⋆ De kans dat deze vriend geen poster van Messi krijgt wordt gegeven door
  $\dfrac{\binom{14}{3}}{\binom{18}{3}} = \dfrac{364}{816} = \frac{91}{204} \approx 0{,}4461$
  of door $\dfrac{14 \cdot 13 \cdot 12}{18 \cdot 17 \cdot 16} = \dfrac{2184}{4896} = \frac{91}{204} \approx 0{,}4461$
- ⋆ De kans dat deze vriend wel een poster van Messi krijgt is $1 - \frac{91}{204} = \frac{113}{204} = 0{,}5539$.

Opgave 6a

- ⋆ Dit percentage wordt gegeven door normalcdf(-10^{99},50,52,2) of door
  $\mathrm{P}\left(Z < \dfrac{50-52}{2}\right) = \mathit{tabelwaarde}(-1)$
- ⋆ Dit percentage is afgerond gelijk aan 15,87%.

Opgave 6b

- ⋆ T, het totale gewicht van de slof, is normaal verdeeld
  met gemiddelde $\mu_T = 20 \cdot 52 + 5 = 1045$ gram.
- ⋆ $\sigma_T = \sqrt{20 \cdot 2^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9$
- ⋆ $\mathrm{P}(T > 1025)$ wordt gegeven door normalcdf(1025,10^{99},1045,9)
  of door $\mathrm{P}\left(Z > \dfrac{1025-1045}{9}\right) \approx 1 - \mathit{tabelwaarde}(-2{,}22)$
- ⋆ Deze kans is afgerond gelijk aan 0,987.

Opgave 6c

- ⋆ Dit gewicht wordt gegeven door invNorm(.01,52,2)
- ⋆ Dit gewicht is afgerond 47,35 gram.

Alternatief:

- ⋆ De z-waarde bij 0,01 is –2,326 (zie onderaan tabel).
- ⋆ Uit $z = \dfrac{g-\mu}{\sigma}$ volgt dan $g = \mu + z \cdot \sigma = 52 - 2{,}326 \cdot 2 \approx 47{,}35$ gram.

Opgave 6d

- ⋆ X, het aantal pakjes met een te laag gewicht, is binomiaal verdeeld
  met $n = 50$ en $p = 0{,}01$.
- ⋆ $\mathrm{P}(X > 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 3)$
- ⋆ De tabel of de GR (binomcdf(50,.01,3)) geeft $\mathrm{P}(X \leq 3) = 0{,}9984$
- ⋆ De gevraagde kans is dus afgerond 0,0016.

Opgave 7a

- ⋆ De kans dat Frans op de heenweg niet gecontroleerd wordt, is $1 - 0{,}05 = 0{,}95$.
- ⋆ De kans dat Frans op de terugweg niet gecontroleerd wordt, is $1 - 0{,}1 = 0{,}9$.
- ⋆ De kans dat Frans die dag niet gecontroleerd wordt, is $0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}855$.

Opgave 7b

- ⋆ De verwachtingswaarde van het bedrag dat hij op de heenreis moet betalen is $0 \cdot 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 38{,}50 = 1{,}925$.
- ⋆ De verwachtingswaarde van het bedrag dat hij op de terugreis moet betalen is $0 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 38{,}50 = 3{,}85$
- ⋆ De verwachtingswaarde voor de hele dag is de som van die voor de heenreis en de terugreis, dit is $1{,}925 + 3{,}85 = 5{,}775$.

Alternatief:

- ⋆ De kans dat Frans alleen op de heenweg gecontroleerd wordt, is $0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0{,}045$; de kans dat Frans alleen op de terugweg gecontroleerd wordt, is $0{,}95 \cdot 0{,}1 = 0{,}095$; de kans dat Frans beide keren gecontroleerd wordt, is $0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005$.
- ⋆ De verwachtingswaarde van X, het bedrag dat hij die dag moet betalen, is dus
$$0 \cdot \mathrm{P}(X = 0) + 38{,}50 \cdot \mathrm{P}(X = 38{,}50) + 77 \cdot \mathrm{P}(X = 77)$$
$$= 0 + 38{,}50 \cdot (0{,}045 + 0{,}095) + 77 \cdot 0{,}005 = 5{,}775$$

Opgave 7c

- ⋆ Als hij wel kaartjes zou kopen, dan betaalt hij $2 \times 3{,}50 = 7$ euro.
Geen kaartjes kopen is dus naar verwachting goedkoper dan wel kaartjes kopen.
- ⋆ Hij kan ook alleen voor de terugweg een kaartje kopen, dan betaalt hij naar verwachting $1{,}925 + 3{,}50 = 5{,}425$ euro.
- ⋆ Dit is minder dan wat hij naar verwachting betaalt als hij wel kaartjes koopt, maar ook dan wat hij naar verwachting betaalt als hij geen kaartjes koopt.

Opgave 7d

- ⋆ $H_0 : p = 0{,}15$; $H_1 : p > 0{,}15$.

Opgave 7e

- ⋆ De overschrijdingskans is $\mathrm{P}(X \geq 6)$, waarbij X binomiaal verdeeld is met $n = 20$ en $p = 0{,}15$.
- ⋆ $\mathrm{P}(X \geq 6) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 5)$
- ⋆ De tabel of de GR (binomcdf(20,.15,5)) geeft dat dit gelijk is aan $1 - 0{,}9327 = 0{,}0673$.
- ⋆ De overschrijdingskans is groter dan α, dus de nulhypothese wordt niet verworpen.
Er is niet genoeg reden om aan te nemen dat de kans op controle groter is dan 15%.