

## CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

### Tentamen Wiskunde A

Datum: 28 juli 2014  
Tijd: 14.00 - 17.00 uur  
Aantal opgaven: 7

Zet uw naam op alle in te leveren blaadjes.

Laat bij elke opgave door middel van een redenering, een berekening of een toelichting op het gebruik van de grafische rekenmachine zien hoe het antwoord verkregen is. Als deze ontbreekt worden voor het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen tipp-ex o.i.d.. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een (grafische) rekenmachine van een type dat goedgekeurd is voor het Centraal Examen Wiskunde van het vwo. Overige hulpmiddelen, zoals formulekaart, BINAS en tabellenboek zijn NIET toegestaan. Op pagina 5 is een lijst van formules afgedrukt; op de laatste drie pagina's vindt u tabellen van de binomiale en de normale kansverdeling.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden.

Op [www.ccvx.nl](http://www.ccvx.nl) vindt u vanaf begin volgende week:

- de uitwerkingen van dit tentamen;
- de stand van zaken van de correctie van het tentamen.

**U wordt dringend verzocht om de Open Universiteit niet te bellen of te mailen over uw uitslag. Deze wordt zo spoedig mogelijk naar u opgestuurd.**

Te behalen punten per onderdeel:							
Opgave	1	2	3	4	5	6	7
a	4	3	2	5	3	4	4
b	4	7	3	4	3	4	4
c	4		2	4	4	5	2
d	5		4				6
Totaal	17	10	11	13	10	13	16
Cijfer =	$\frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$						

## 1 Functies

Van de functie  $f$  is gegeven:  $f(1) = 256$  en  $f(5) = 2401$ .

- 4 pt **a** Bereken  $f(2)$  voor het geval dat  $f$  een lineaire functie is.  
4 pt **b** Bereken  $f(2)$  ook voor het geval dat  $f$  een exponentiële functie is.

De functie  $g$  wordt gegeven door  $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ .

- 4 pt **c** Los algebraïsch op:  $g(x) = 0$ .  
De grafiek van  $g$  heeft twee toppen.  
5 pt **d** Bereken de coördinaten van deze twee toppen algebraïsch.

## 2 Tel uit je winst

Een tuinmeubelenfabriek produceert luxe tuinstoelen van het type Relax.

De verkoopprijs in euro's ( $p$ ) van deze tuinstoelen is een functie van het geproduceerde aantal ( $q$ ). Deze functie wordt gegeven door de formule

$$p(q) = 250 - 4\sqrt{q}$$

De kosten in euro's ( $K$ ) voor de productie van deze tuinstoelen worden gegeven door

$$K(q) = 50.000 + 40q$$

- 3 pt **a** Toon aan dat de winst in euro's ( $W$ ) gegeven wordt door

$$W(q) = 210q - 4q\sqrt{q} - 50.000$$

- 7 pt **b** Bereken de maximale winst algebraïsch en bereken de prijs van de tuinstoelen als de winst maximaal is.

### 3 Reuzenrad

Jan maakt een ritje met een reuzenrad op de kermis. De gondels houden eerst één voor één halt bij het instapplatform, dat zich op het laagste punt van het reuzenrad bevindt. Als alle gondels gevuld zijn, gaat het reuzenrad gedurende vijf minuten draaien. De hoogte (in meters boven straatniveau) van de vloer gondel waar Jan in zit noemen we  $H$ . Deze wordt gedurende de vijf minuten dat het reuzenrad draait, gegeven door de formule

$$H(t) = 11 + 10 \sin\left(\pi\left(\frac{8}{5}t + \frac{5}{6}\right)\right) \quad (t \text{ in minuten})$$

- 2 pt **a** Op welke hoogte is de vloer van de gondel waar Jan in zit op  $t = 0$ ?
- 3 pt **b** Beredeneer of de gondel van Jan zich op  $t = 0$  omhoog dan wel omlaag beweegt.
- 2 pt **c** Bereken algebraïsch de hoogte van de vloer van een gondel bij het instapplatform.
- 4 pt **d** Bereken algebraïsch hoeveel ronden het reuzenrad draait in vijf minuten.

### 4 Afval

In Afvalland wordt op dit moment 50 kiloton afval per week aan de vuilnisman meegegeven. Er wordt een campagne gevoerd om de hoeveelheid afval terug te brengen. Volgens onderzoek van het bureau dat deze campagne uitvoert, zal de hoeveelheid afval afnemen volgens de formule

$$A = \frac{1400t + 7000}{98t + 140}$$

In deze formule is  $A$  het aantal kiloton afval per week en is  $t$  de tijd in jaren, met  $t = 0$  op 1 augustus 2014.

- 5 pt **a** Toon met behulp van de afgeleide functie  $\frac{dA}{dt}$  aan dat de hoeveelheid afval volgens deze formule inderdaad afneemt.
- 4 pt **b** Bereken algebraïsch in welk jaar de hoeveelheid afval volgens deze formule is afgenomen tot 20 kiloton per week.

Volgens een milieubeweging wordt de wekelijkse hoeveelheid afval niet gegeven door de formule van het campagnebureau, maar door de formule

$$A = 50 - 15 \log(9t + 1)$$

met  $A$  en  $t$  als hierboven.

- 4 pt **c** Bereken algebraïsch in welk jaar de hoeveelheid afval volgens de formule van de milieubeweging is afgenomen tot 20 kiloton per week.

## 5 Internet in de trein?

In veel Nederlandse intercitytreinen kun je tegenwoordig gebruik maken van gratis internet. Op de lijn tussen Zwolle en Arnhem is 60% van de treinen voorzien van een internetaansluiting. Als er zo'n aansluiting in de trein zit, lukt het echter in 25% van de gevallen niet om verbinding te maken met het internet.

Janneke reist vaak met de trein tussen Zwolle en Arnhem. Zij doet dit op wisselende tijden, dus we mogen aannemen dat het al dan niet beschikbaar zijn van internet voor al deze treinritten onafhankelijke gebeurtenissen zijn.

Op een dag moet Janneke dringend een e-mail versturen, maar zij heeft daar alleen de gelegenheid voor tijdens de treinreis. Zij reist die dag 's morgens van Zwolle naar Arnhem en 's middags weer terug. Als ze op de heenweg verbinding kan maken met internet, verstuurt zij haar mail dan direct. Zo niet, dan probeert zij het op de terugweg nog een keer.

- 3 pt **a** Laat zien dat de kans dat Janneke de e-mail niet op de heenweg kan versturen, gelijk is aan 0,55.
- 3 pt **b** Bereken de kans dat Janneke de e-mail op de terugweg verstuurt.
- 4 pt **c** Bereken de kans dat Janneke in de volgende 20 treinritten die zij tussen Zwolle en Arnhem maakt, tenminste 9 keer geen e-mail kan versturen.  
Geef het antwoord afgerond op vier cijfers achter de komma.

## 6 Prijzen en Waardebonnen

Winkelcentrum "De Tuin" viert zijn 25 jarig bestaan met een rad van fortuin. Voor elke 25 euro die je in het winkelcentrum besteedt mag je een slinger geven aan het rad van fortuin. Dit rad bestaat uit 12 even grote vakken, die bij iedere nieuwe slinger aan het rad dezelfde kans hebben dat de pijl in dat vak blijft staan. Op ieder vak staat aangegeven welke prijs de klant dan wint. Op het rad staan 8 prijzen met een waarde van 5 euro, 3 prijzen met een waarde van 10 euro en er staat één prijs met een waarde van 25 euro. Van elk van deze prijzen is bij het begin van de actie een grote hoeveelheid beschikbaar.

Op de eerste dag van deze actie heeft Anja voor 75 euro besteed. Ze mag daarom drie keer een slinger geven aan het rad van fortuin. Zodoende krijgt zij drie prijzen.

- 4 pt **a** Bereken de kans dat de totale waarde van deze prijzen gelijk is aan 20 euro.
- 4 pt **b** Bereken de kans dat de totale waarde van deze prijzen groter is dan 30 euro.  
Geef het antwoord afgerond op vier cijfers achter de komma.

Op de laatste dag van de actie zijn vrijwel alle beschikbare prijzen weggegeven. Daarom wordt er een doos gemaakt met 120 enveloppen. In 80 van deze enveloppen zit een waardebon van 10 euro, in 30 van deze enveloppen zit een waardebon van 20 euro en in de resterende 10 enveloppen zit een waardebon van 30 euro. De enveloppen worden goed gemengd en aan de buitenkant is niet te zien wat de waarde is van de waardebon die er in zit. Op deze laatste dag mogen de eerste 120 klanten ieder blindelings één envelop uit deze doos pakken.

- 5 pt **c** Bereken de kans dat de totale waarde van de waardebonnen die de eerste drie klanten op deze laatste dag pakken, gelijk is aan 50 euro.  
Geef het antwoord afgerond op vier cijfers achter de komma.

## 7 Boer Bert

Vorig jaar was het gewicht van de appels uit de oogst van Boer Bert normaal verdeeld met een gemiddelde van 99 gram en een standaardafwijking van 10 gram. In een doos zitten 25 aselect gekozen appels uit deze oogst.

- 4 pt **a** Bereken de kans dat deze 25 appels in totaal meer dan 2500 gram wegen. Geef het antwoord afgerond op vier cijfers achter de komma.

De appels worden verdeeld in drie gewichtscategorieën:

Klein: tot 90 gram

Middel: 90 gram tot 110 gram

Groot: meer dan 110 gram.

- 4 pt **b** Hoeveel van de 25 appels uit de doos worden naar verwachting ingedeeld in de klasse Middel?

Boer Bert wil weten of het gemiddelde gewicht van de appels uit de oogst van dit jaar gelijk is aan de 99 gram van vorig jaar. Om dit te toetsen weegt hij 9 aselect gekozen appels uit de oogst van dit jaar. Hij neemt daarbij aan dat het gewicht van de appels weer normaal verdeeld is met een standaardafwijking 10 gram en hij neemt een significantieniveau van  $\alpha = 0,05$ .

- 2 pt **c** Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

De gewichten van de 9 appels zijn: 89, 101, 90, 93, 96, 85, 91, 92 en 100 gram.

- 6 pt **d** Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure?

# Lijst van formules voor het voortentamen Wiskunde A

## Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen  $X$  en  $Y$  geldt:  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$   
 Voor onafhankelijke toevalsvariabelen  $X$  en  $Y$  geldt:  $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet:

Bij een serie van  $n$  onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som  $S$  en voor het gemiddelde  $\bar{X}$  van de uitkomsten  $X$ :

$$E(S) = n \cdot E(X) \qquad \sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$$

$$E(\bar{X}) = E(X) \qquad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

## Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele  $X$ , waarbij  $n$  het aantal experimenten is en  $p$  de kans op succes per keer, geldt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{met } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Verwachting:  $E(X) = n \cdot p$       Standaardafwijking:  $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

## Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele  $X$  die normaal verdeeld is met gemiddelde  $\mu$  en standaardafwijking  $\sigma$  geldt:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ is standaard normaal verdeeld en } P(X < g) = P\left(Z < \frac{g - \mu}{\sigma}\right)$$

## Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

## Logaritmen

regel	voorwaarden
${}^s\log a + {}^s\log b = {}^s\log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^s\log a - {}^s\log b = {}^s\log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^s\log a^p = p \cdot {}^s\log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^s\log a = \frac{p \log a}{p \log g}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

## Rijen

Rekenkundige rij:	Som = $\frac{1}{2} \cdot$ aantal termen $\cdot (u_e + u_l)$
Meetkundige rij:	Som = $\frac{u_{l+1} - u_e}{r - 1}$ ( $r \neq 1$ )
In beide formules geldt:	$e$ = rangnummer eerste term; $l$ = rangnummer laatste term.







DE STANDAARD-NORMALE VERDELING

Verdelingsfunctie  $\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-1/2t^2} dt$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0303	0.0301	0.0294
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

DE STANDAARD-NORMALE VERDELING (vervolg)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Overschrijdingskanssen (één-, resp. tweezijdig)

z	0.675	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090
$P(Z > z)$	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
$P( Z  > z)$	0.50	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002

**Opgave 1a**

- ★ De toename per eenheid is  $a = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{2401 - 256}{4} = \frac{2145}{4} = 536\frac{1}{4}$
- ★ Dit geeft  $f(2) = f(1) + a = 256 + 536\frac{1}{4} = 792\frac{1}{4}$

**Opgave 1b**

- ★ De groeifactor over vier tijdseenheden is  $\frac{2401}{256}$ .
- ★ De groeifactor over één tijdseenheid is dus  $g = \sqrt[4]{\frac{2401}{256}} = 1,75$ .
- ★ Dit geeft  $f(2) = f(1) \cdot g = 256 \cdot 1,75 = 448$

**Opgave 1c**

- ★  $2x^3 - 15x^2 + 36x = 0$  geeft  $x \cdot (2x^2 - 15x + 36) = 0$
- ★ Hieruit volgt  $x = 0$  of  $2x^2 - 15x + 36 = 0$
- ★ Voor de vergelijking  $2x^2 - 15x + 36 = 0$  geldt  $D = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 36 = -63 < 0$
- ★ De enige oplossing is dus  $x = 0$ .

**Opgave 1d**

- ★  $g'(x) = 6x^2 - 30x + 36$
- ★  $g'(x) = 0$  geeft  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .
- ★ Hieruit volgt  $(x - 2)(x - 3) = 0$ , dus  $x = 2$  of  $x = 3$ .  
*Mag uiteraard ook met de abc-formule.*
- ★  $g(2) = 28$ ;  $g(3) = 27$ . De toppen zijn dus  $(2,28)$  en  $(3,27)$ .

**Opgave 2a**

- ★ De opbrengst wordt gegeven door  $R(q) = q \cdot p$
- ★ De winst wordt gegeven door  $W(q) = R(q) - K(q)$
- ★ De winst in euro's wordt dus gegeven door  
$$W(q) = q(250 - 4\sqrt{q}) - (50.000 + 40q) = 250q - 4q\sqrt{q} - 50.000 - 40q$$
$$= 210q - 4q\sqrt{q} - 50.000.$$

**Opgave 2b**

- ★ Schrijf  $W(q) = 210q - 4q^{3/2} - 50.000$ .
- ★ Dit geeft  $W'(q) = 210 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot q^{1/2} = 210 - 6\sqrt{q}$ .
- ★  $W'(q) = 0$  geeft  $210 - 6\sqrt{q} = 0$ , dus  $6\sqrt{q} = 210$  en  $\sqrt{q} = 35$ .
- ★ Hieruit volgt  $q = 35^2 = 1225$ .
- ★ De maximale winst is zodoende  
 $W(1225) = 210 \cdot 1225 - 4 \cdot 1225 \cdot 35 - 50.000 = 35.750$  euro.
- ★ De prijs is dan  $p(1225) = 250 - 4 \cdot \sqrt{1225} = 110$  euro.

**Opgave 3a**

- ★  $H(0) = 11 + 10 \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$  met  $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$
- ★ Dit geeft  $H(0) = 11 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 11 + 5 = 16$  (meter).

**Opgave 3b**

- ★ We kijken naar de formule achter de sinus:  $\pi(\frac{8}{5}t + \frac{5}{6})$ .  
Als  $t$  toeneemt, neemt deze formule ook toe.  
Bij  $t = 0$  is de sinus van deze formule echter dalend  
(zie het verloop van de grafiek van  $g(x) = \sin(x)$  bij  $x = \frac{5}{6}\pi$ ).
- ★  $H(t)$  is dus dalend bij  $t = 0$ , de gondel beweegt zich dan dus omlaag.

**Opgave 3c**

- ★ De gondel is dan op het laagste punt. In dat punt is de sinus gelijk aan  $-1$ .
- ★ Dit geeft  $H = 11 + 10 \cdot -1 = 11 - 10 = 1$  (meter).

**Opgave 3d**

- ★ De periode van  $f(x) = a + b \sin(c(x - d))$  is  $\frac{2\pi}{c}$ .
- ★ In deze opgave geldt  $c = \frac{8}{5}\pi$ , dus de periode is  $\frac{2\pi}{\frac{8}{5}\pi} = \frac{5}{4}$  (minuten).
- ★ In vijf minuten passen 4 periodes van  $\frac{5}{4}$  minuten.
- ★ Het rad draait dus 4 ronden.

**Opgave 4a**

Schrijf  $A(t) = \frac{T(t)}{N(t)}$  met  $T(t) = 1400t + 7000$  en  $N(t) = 98t + 140$

- ★  $A'(t) = \frac{N(t) \cdot T'(t) - T(t) \cdot N'(t)}{N^2(t)} = \frac{(98t + 140) \cdot 1400 - (1400t + 7000) \cdot 98}{(98t + 140)^2}$
- ★  $\dots = \frac{137200t + 196000 - 137200t - 686000}{(98t + 140)^2} = \frac{-490000}{(98t + 140)^2}$
- ★ Aangezien de noemer voor  $t > 0$  altijd positief is, is deze afgeleide voor  $t > 0$  altijd negatief.
- ★ Hieruit volgt dat  $A$  dalend is, dus dat de hoeveelheid afval afneemt.

**Opgave 4b**

- ★  $\frac{1400t + 7000}{98t + 140} = 20$  geeft  $1400t + 7000 = 20(98t + 140)$ .
- ★ Dit geeft  $1400t + 7000 = 1960t + 2800$ , ofwel  $560t = 4200$ .
- ★ Hieruit volgt  $t = \frac{4200}{560} = 7,5$ .
- ★ 7,5 jaar na 1 augustus 2014 is in het jaar 2022 (en wel op 1 februari).

**Opgave 4c**

- ★  $50 - 15 \log(9t + 1) = 20$  geeft  $-15 \log(9t + 1) = -30$ , dus  $\log(9t + 1) = 2$ .
- ★ Hieruit volgt  $9t + 1 = 10^2$ .
- ★ Dit geeft  $9t + 1 = 100$ , dus  $9t = 99$  en  $t = 11$ .
- ★ 11 jaar na 1 augustus 2014 is in het jaar 2025.

**Opgave 5a**

- ★ De kans dat zij een trein zonder internetaansluiting treft is gelijk aan  $1 - 0,6 = 0,4$ .
- ★ De kans dat zij een trein treft met internetaansluiting, maar dat het haar niet lukt om verbinding te maken, is gelijk aan  $0,6 \cdot 0,25 = 0,15$ .
- ★ De kans dat zij de e-mail niet kan versturen is dus  $0,4 + 0,15 = 0,55$ .

*Alternatief:*

- ★ De kans dat een internetaansluiting, als deze aanwezig is, wel werkt, is gelijk aan  $1 - 0,25 = 0,75$ .
- ★ De kans dat zij verbinding kan maken met internet is dus  $0,6 \cdot 0,75 = 0,45$ .
- ★ De kans dat zij de e-mail niet kan versturen is zodoende  $1 - 0,45 = 0,55$ .

**Opgave 5b**

- ★ De kans dat zij op een reis wel verbinding kan maken met internet is  $1 - 0,55 = 0,45$ .
- ★ De kans dat dit haar niet op de heenweg, maar wel op de terugweg lukt, is dus  $0,55 \cdot 0,45$ .
- ★ Dit is gelijk aan 0,2475.

**Opgave 5c**

- ★ Deze kans wordt gegeven door  $P(X \geq 9)$ .  
Hierin is  $X$  binomiaal verdeeld met  $n = 20$  en  $p = 0,55$ .
- ★  $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8)$
- ★ De tabel of  $\text{binomcdf}(20,0,55,8)$  geeft  $P(X \leq 8) = 0,1308$ .
- ★ De gevraagde kans is dus  $1 - 0,1308 = 0,8692$ .

**Opgave 6a**

- ★ De totale waarde is 20 euro als zij 2 keer een prijs van 5 euro wint en 1 keer een prijs van 10 euro.
- ★  $P(\text{eerste keer } 5, \text{ tweede keer } 5, \text{ derde keer } 10) = \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{3}{12}$
- ★ De prijs van 10 euro kan ook als eerste of als tweede getrokken worden, dus de gevraagde kans is drie keer zo groot.
- ★ De gevraagde kans is dus  $3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

**Opgave 6b**

- ★ De totale waarde is groter dan 30 euro als zij tenminste één keer een prijs van 25 euro wint.
- ★ De kans dat zij geen enkele keer een prijs van 25 euro wint is  $\frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12}$   
*Deze kans kan ook worden uitgerekend met  $\text{binompdf}(3,1/12,0)$  en met  $\text{binomcdf}(3,1/12,0)$ .*
- ★ De kans dat zij tenminste één keer een prijs van 25 euro wint is dus  $1 - \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12}$
- ★ Dit is afgerond op vier decimalen gelijk aan 0,2297.

**Opgave 6c**

- ★ De totale waarde is 50 euro als twee klanten een bon van 10 euro pakken en de derde en bon van 30 euro en ook als twee klanten een bon van 20 euro pakken en de derde een bon van 10 euro.

$$\begin{aligned} \star P(\text{eerste } 10, \text{tweede } 10, \text{derde } 30) &= \frac{80}{120} \cdot \frac{79}{119} \cdot \frac{10}{118} \\ P(\text{eerste } 20, \text{tweede } 20, \text{derde } 10) &= \frac{30}{120} \cdot \frac{29}{119} \cdot \frac{80}{118} \end{aligned}$$

- ★ In het eerste geval kan de prijs van 30 euro kan ook als eerste of als tweede getrokken worden, in het tweede geval kan de prijs van 10 euro ook als eerste of tweede getrokken worden.

$$\text{De gevraagde kans is dus } 3 \cdot \frac{80}{120} \cdot \frac{79}{119} \cdot \frac{10}{118} + 3 \cdot \frac{30}{120} \cdot \frac{29}{119} \cdot \frac{80}{118}$$

- ★ Dit is (afgerond) gelijk aan 0,2364.

*Alternatief:*

- ★ De totale waarde is 50 euro als twee klanten een bon van 10 euro pakken en de derde en bon van 30 euro en ook als twee klanten een bon van 20 euro pakken en de derde een bon van 10 euro.

$$\star P(2 \text{ keer } 10 \text{ en } 1 \text{ keer } 30) = \frac{\binom{80}{2} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{120}{3}} \approx 0,1125$$

$$P(2 \text{ keer } 20 \text{ en } 1 \text{ keer } 10) = \frac{\binom{30}{2} \cdot \binom{80}{1}}{\binom{120}{3}} \approx 0,1239$$

- ★ Antwoord:  $0,1125 + 0,1239 = 0,2364$

**Opgave 7a**

- ★  $T$ , het totale gewicht van deze 25 appels, is normaal verdeeld met gemiddelde  $\mu_T = 25 \cdot 99 = 2475$  gram.

- ★ De standaardafwijking van  $T$  is  $\sigma_T = \sqrt{25} \cdot 10 = 50$  gram.

- ★  $P(T > 10.000)$  wordt gegeven door  $\text{normalcdf}(2500, 10^{99}, 2475, 50)$   
of door  $P\left(Z > \frac{2500 - 2475}{50}\right) = 1 - P(Z \leq 0,5)$ .

- ★ Deze kans is gelijk aan 0,3085.

**Opgave 7b**

- ★ De kans dat een appel wordt ingedeeld in de klasse Middel wordt gegeven door  $\text{normalcdf}(90, 110, 99, 10)$

$$\text{of door } P\left(\frac{90 - 99}{10} < Z < \frac{110 - 99}{10}\right) = P(Z \leq 1,1) - P(Z \leq -0,9).$$

- ★ Deze kans is (afgerond) gelijk aan 0,68.

- ★ Er worden naar verwachting  $25 \times 0,68 = 17$  appels uit de doos ingedeeld in de klasse Middel.

**Opgave 7c**

- ★  $H_0 : \mu = 99$   $H_1 : \mu \neq 99$

**Opgave 7d**

- ★  $\bar{X}$ , het gemiddelde gewicht van de 9 appels, is normaal verdeeld met  $\mu_{\bar{X}} = 99$  gram.
- ★  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3}$ .
- ★ Het gerealiseerde gemiddelde is 93 gram, de overschrijdingskans is dus  $P(\bar{X} \leq 93)$
- ★ Deze kans wordt gegeven door  $\text{normalcdf}(-10^9, 93, 99, 10/3)$   
of door  $P\left(Z \leq \frac{93 - 99}{10/3}\right) = P(Z \leq -1,8)$   
en is gelijk aan 0,0359.
- ★ Deze kans is groter dan  $\frac{1}{2}\alpha = 0,025$ .
- ★ De nulhypothese wordt dus niet verworpen, er is niet genoeg reden om aan te nemen dat het gemiddelde gewicht van de appels dit jaar anders is dan vorig jaar.