CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde B

Datum:	16 januari 2014
Tijd:	14.00 - 17.00 uur
Aantal opgaven:	5

Zet uw naam op alle in te leveren blaadjes.

Laat bij elke opgave door middel van een redenering, een berekening of een toelichting op het gebruik van de grafische rekenmachine zien hoe het antwoord verkregen is. Als deze ontbreekt worden voor het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen tipp-ex o.i.d.. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een (grafische) rekenmachine van een type dat goedgekeurd is voor het Centraal Examen Wiskunde van het vwo. Overige hulpmiddelen, zoals formulekaart, BINAS en tabellenboek zijn NIET toegestaan. Op bladzijde 4 is een lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden.

Op www.ccvx.nl vindt u vanaf eind volgende week:

- de uitwerkingen van dit tentamen;
- de stand van zaken van de correctie van het tentamen.

U wordt dringend verzocht om de Open Universiteit niet te bellen of te mailen over uw uitslag. Deze wordt zo spoedig mogelijk naar u opgestuurd.

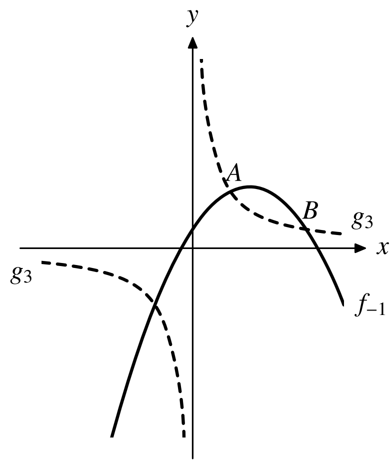
Te behalen punten per onderdeel:					
Opgave	1	2	3	4	5
a	3	3	5	6	6
b	6	6	3	6	6
c	7		5	6	8
d	6		8		
Totaal	22	9	21	18	20

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

1 Voor $x \neq 0$ worden de functies f_a en g_b gegeven door

$$f_a(x) = ax^2 + 3x + 1 \text{ en } g_b(x) = \frac{b}{x}$$

De grafieken van f_{-1} en g_3 ziet u in de figuur hieronder.



Zoals u ziet snijden de grafieken van f_{-1} en g_3 elkaar in drie punten waarvan er twee, A en B, rechts van de y-as liggen.

3 pt **a** Toon aan dat $x_A = 1$ en $x_B = 3$.

6 pt **b** Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van f_{-1} en g_3.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = f_{\frac{1}{2}}(x) + g_4(x)$.

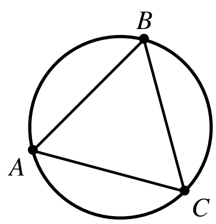
7 pt **c** Toon algebraïsch aan dat de grafiek van h één buigpunt heeft.

6 pt **d** Bereken exact voor welke waarden van a en b de grafieken van f_a en g_b elkaar raken in een punt met x-coördinaat 1.

2 Gegeven een driehoek ABC met $\angle B = \angle C$.
D is het snijpunt van de hoogtelijn uit A met zijde BC.

3 pt **a** Toon aan dat de driehoeken ABD en ACD congruent zijn.

In de figuur hiernaast ziet u een gelijkzijdige driehoek ABC en de omgeschreven cirkel van deze driehoek.
Het snijpunt van de hoogtelijnen van deze driehoek noemen we H.
Punt P ligt op de kortste cirkelboog AB.
Op bladzijde 3 vindt u twee vergrote afdrukken van deze figuur.



6 pt **b** Toon aan dat $\angle APB = \angle AHB$.

3 Gegeven de functies $f(x) = \ln(x + \mathrm{e})$ en $g(x) = \ln(x + 2\mathrm{e})$.
Een verticale lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in punt P en de grafiek van g in punt Q.
De afstand tussen P en Q is gelijk aan $\ln(3)$.

5 pt **a** Bereken de waarde van p exact.

3 pt **b** Toon aan dat de functie $F(x) = x \cdot \ln(x + \mathrm{e}) + \mathrm{e} \cdot \ln(x + \mathrm{e}) - x$ een primitieve is van f.

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de negatieve x-as, de positieve y-as en de grafiek van f.

5 pt **c** Bereken algebraïsch de oppervlakte van vlakdeel V.

8 pt **d** Bereken algebraïsch de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V gewenteld wordt rond de y-as.

4 Gegeven de functie $f(x) = 2^{x+1} + 2^{4-x}$.

6 pt **a** Los exact op: $f(x) = 33$.

6 pt **b** Bereken exact voor welke waarde van a de horizontale lijn $y = a$ raaklijn is aan de grafiek van f.
Schrijf het antwoord in de vorm $a = 2^b$.

Voor een zekere waarde van a snijdt de lijn $y = a$ de grafiek van f in twee punten P en Q. De lengte van het lijnstuk PQ is gelijk aan 4.

6 pt **c** Bereken deze waarde van a exact en schrijf het antwoord in de vorm $a = b\sqrt{2}$.

5 Gegeven de functies $f(x) = \sin(x) + \cos(3x)$ en $g(x) = \sin(x) \cdot \sin(2x)$.

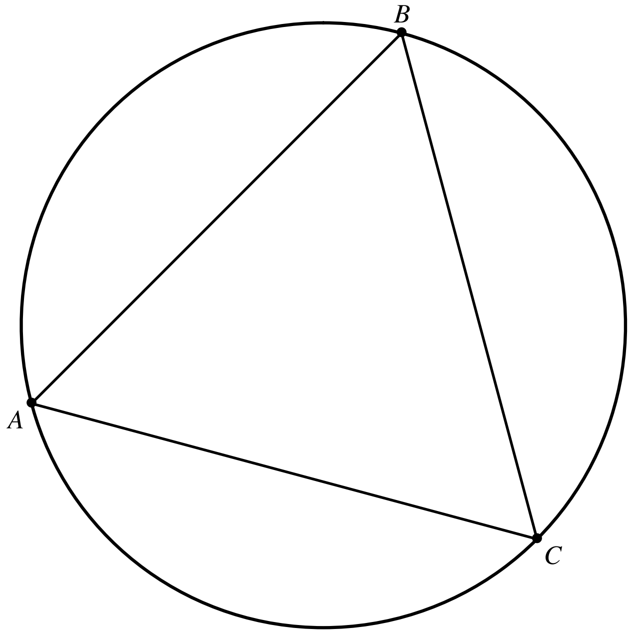
6 pt **a** Los exact op: $f(x) = 0$.

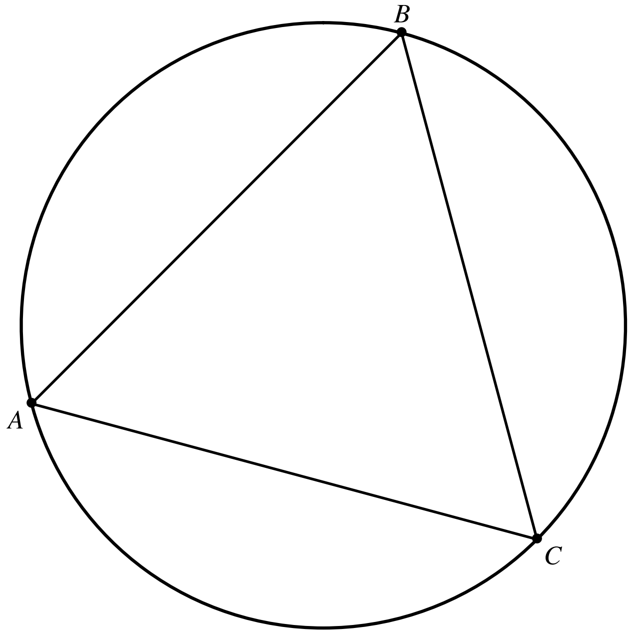
6 pt **b** Los exact op: $g(x) = \cos(x)$.

De grafiek van g heeft drie horizontale raaklijnen.

8 pt **c** Bereken de vergelijkingen van deze drie horizontale raaklijnen exact.

Antwoordblad bij opgave 2 Naam: _______________





Lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen voor het voortentamen Wiskunde B

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u \qquad \sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u \qquad \sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t-u}{2} \cos \frac{t+u}{2}$$

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u \qquad \cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u \qquad \cos t - \cos u = -2 \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2}$$

Opgave 1a

- ⋆ Omdat de x-coördinaten al bekend zijn, hoeven we alleen te controleren dat de functiewaarden van f_{-1} en g_3 gelijk zijn voor deze x-waarden.
- ⋆ $f_{-1}(1) = -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 = 3 = \dfrac{3}{1} = g_3(1)$
- ⋆ $f_{-1}(3) = -1 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1 = 1 = \dfrac{3}{3} = g_3(3)$

Opgave 1b

- ⋆ In de grafiek zien we dat het vlakdeel tussen de punten A en B ligt en dat daar geldt: $f_{-1} > g_3$.
  Te berekenen is dus: $\int\limits_1^3 -x^2 + 3x + 1 - \dfrac{3}{x}\,\mathrm{d}x$
- ⋆ $\ldots = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 3\ln(x)\right]_1^3$
- ⋆ $\ldots = -9 + 13\frac{1}{2} + 3 - 3\ln(3) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 - 0\right)$
  $\ldots = 7\frac{1}{2} - 3\ln(3) + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1 = 5\frac{1}{3} - 3\ln 3$

Opgave 1c

- ⋆ $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1 + 4x^{-1}$
- ⋆ $h'(x) = x + 3 + (-1) \cdot 4x^{-2} = x + 3 - 4x^{-2}$
- ⋆ $h''(x) = 1 - (-2) \cdot 4x^{-3} = 1 + \dfrac{8}{x^3}$
- ⋆ $h''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$

Hiermee is aangetoond dat er alleen voor $x = -2$ een buigpunt mogelijk is, nu moet nog worden aangetoond dat dit inderdaad een buigpunt is.

- ⋆ Voor $x < -2$ geldt $h''(x) > 0$ (bijvoorbeeld $h''(-3) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$).
- ⋆ Voor $-2 < x < 0$ geldt $h''(x) < 0$ (bijvoorbeeld $h''(-1) = 1 - 8 = -7$).
- ⋆ Omdat h'' van teken wisselt, heeft h een buigpunt voor $x = -2$.

Alternatief voor de laatste drie stappen:

- ⋆ Voor $x < -2$ geldt $h'(x) < h'(-2) = 0$ (bijvoorbeeld $h'(-3) = -\frac{4}{9}$).
- ⋆ Voor $-2 < x < 0$ geldt $h'(x) < h'(-2) = 0$ (bijvoorbeeld $h'(-1) = -2$).
- ⋆ Hieruit volgt dat h' een maximum heeft voor $x = -2$, dus dat h daar een buigpunt heeft.

Opgave 1d

- ⋆ Er moet gelden $f_a(1) = g_b(1)$ en $f_a'(1) = g_b'(1)$.
- ⋆ Uit $f_a(1) = g_b(1)$ volgt $a + 4 = b$ ofwel $b = a + 4$.
- ⋆ $f_a'(x) = 2ax + 3$, dus $f_a'(1) = 2a + 3$.
  $g_b(x) = b \cdot x^{-1}$, dus $g_b'(x) = -1 \cdot b \cdot x^{-2} = \dfrac{-b}{x^2}$ en $g_b'(1) = -b$.
  Uit $f_a'(1) = g_b'(1)$ volgt dus $2a + 3 = -b$ ofwel $b = -2a - 3$.
- ⋆ Combineren van de twee formules voor b (na "ofwel") geeft
  $a + 4 = -2a - 3 \Leftrightarrow 3a = -7 \Leftrightarrow a = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$.
- ⋆ Hieruit volgt $b = -2\frac{1}{3} + 4 = 1\frac{2}{3}$.

Opgave 2a

- ⋆ Een hoogtelijn snijdt de overstaande zijde loodrecht, dus $\angle ADB = \angle ADC = 90°$.
- ⋆ Verder is gegeven dat $\angle DBA = \angle DCA$ en is AD een gemeenschappelijke zijde.
- ⋆ ABD en ACD zijn dus congruent volgens congruentiegeval ZHH.

Kan ook met de stelling van de gelijkbenige driehoek (AB = AC) en congruentiegeval ZZR.

Opgave 2b

- ⋆ Uit vraag a volgt dat de hoogtelijnen van een gelijkzijdige driehoek ook de middelloodlijnen van de zijden zijn.
  Het snijpunt van de hoogtelijnen is dus het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
- ⋆ Uit vraag a volgt ook dat de hoogtelijnen van een gelijkzijdige driehoek de bisscetrices van de zijden zijn.
  In driehoek ABH geldt dus $\angle HAB = \angle ABH = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$.
- ⋆ Hieruit volgt $\angle AHB = 180° - 2 \times 30° = 120°$.
- ⋆ $APBC$ is een koordenvierhoek.
- ⋆ Hieruit volgt dat $\angle APB = 180° - \angle C = 180° - 60° = 120°$.

Alternatief voor de laatste twee stappen:

- ⋆ $\angle APB$ is een omtrekshoek op de boog ACB.
- ⋆ De bijbehorende middelpuntshoek is gelijk aan $360° - \angle AHB = 360° - 120° = 240°$.
- ⋆ Uit de stelling van de omtrekshoek volgt dan $\angle APB = \frac{1}{2} \times 240° = 120°$.

Opgave 3a

- ⋆ Merk op dat $g(x) > f(x)$, dus dat de lengte van PQ gegeven wordt door $g(p) - f(p)$.
- ⋆ $g(p) - f(p) = \ln(3) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{p + 2e}{p + e}\right) = \ln(3) \Leftrightarrow \dfrac{p + 2e}{p + e} = 3$
- ⋆ Dit geeft $p + 2e = 3p + 3e \Leftrightarrow -2p = e \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}e$

In plaats van de eerste opmerking kan ook de vergelijking $f(p) - g(p) = \ln(3)$ worden opgelost.

Dit leidt tot $p + e = 3p + 6e \Leftrightarrow -2p = 5e \Leftrightarrow p = -\frac{5}{2}e$.

Deze waarde van p zit niet in het domein van f.

Opgave 3b

- $\star$ $F'(x) = [x]' \cdot \ln(x+\mathrm{e}) + x \cdot [\ln(x+\mathrm{e})]' + \mathrm{e} \cdot [\ln(x+\mathrm{e})]' - 1$
- $\star$ $\ldots = 1 \cdot \ln(x+\mathrm{e}) + x \cdot \dfrac{1}{x+\mathrm{e}} + \mathrm{e} \cdot \dfrac{1}{x+\mathrm{e}} - 1$
- $\star$ $\ldots = \ln(x+\mathrm{e}) + \dfrac{x+\mathrm{e}}{x+\mathrm{e}} - 1 = f(x) + 1 - 1 = f(x)$

Opgave 3c

- $\star$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+\mathrm{e}) = 0 \Leftrightarrow x + \mathrm{e} = 1 \Leftrightarrow x = 1 - \mathrm{e}$
  Voor $1 - \mathrm{e} < x \leq 0$ geldt $f(x) > 0$.
  Te berekenen is dus $\int\limits_{1-\mathrm{e}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\star$ $\ldots = [x\ln(x+\mathrm{e}) + \mathrm{e} \cdot \ln(x+\mathrm{e}) - x]_{1-\mathrm{e}}^{0}$
- $\star$ $\ldots = 0 + \mathrm{e} \cdot \ln(\mathrm{e}) - 0 - ((1-\mathrm{e})\ln(1) + \mathrm{e} \cdot \ln(1) - (1-\mathrm{e}))$
- $\star$ $\ldots = 0 + \mathrm{e} - 0 - 0 - 0 + (1 - \mathrm{e}) = 1$

Opgave 3d

- $\star$ De y-waarden van V variëren van $y = 0$ (op de x-as) tot $y = f(0) = 1$.
- $\star$ Te berekenen is dus $\pi \cdot \int\limits_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}y$
- $\star$ $y = \ln(x+\mathrm{e}) \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = x + \mathrm{e} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^y - \mathrm{e}$.
- $\star$ Dit geeft $x^2 = (\mathrm{e}^y - \mathrm{e})^2 = (\mathrm{e}^y)^2 - 2 \cdot \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{2y} - 2 \cdot \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^2$.
- $\star$ Een primitieve (naar y) van deze functie is $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y} - 2 \cdot \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^2 \cdot y$.
- $\star$ Dit geeft $\pi \cdot \int\limits_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}y = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y} - 2 \cdot \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^2 \cdot y\right]_0^1 =$
  $\pi \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\mathrm{e} + 0\right)\right) = \pi \cdot \left(2\mathrm{e} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\right)$

Opgave 4a

- $\star$ $f(x) = 33 \Leftrightarrow 2^{x+1} + 2^{4-x} = 33 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^1 + \dfrac{2^4}{2^x} = 33$
  Met de substitutie $z = 2^x$ gaat dit over in $2z + \dfrac{16}{z} = 33$
  Kan ook zonder deze substitutie expliciet te noemen, zolang er maar eerst gezocht wordt naar 2^x.
- $\star$ Alle termen vermenigvuldigen met z geeft $2z^2 + 16 = 33z \Leftrightarrow 2z^2 - 33z + 16 = 0$
- $\star$ $D = (-33)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 = 961$; $\sqrt{D} = 31$.
- $\star$ Dit geeft $z = \dfrac{33 - 31}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ of $z = \dfrac{33 + 31}{2 \cdot 2} = 16$.
- $\star$ $z = \frac{1}{2}$ geeft $2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$
- $\star$ $z = 16$ geeft $2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

Opgave 4b

- $f'(x) = 2^{x+1} \cdot \ln(2) + 2^{4-x} \cdot \ln(2) \cdot -1 = \ln(2) \cdot \left(2^{x+1} - 2^{4-x}\right)$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} - 2^{4-x} = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{4-x} \Leftrightarrow x + 1 = 4 - x$
  Dit geeft $2x = 3 \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{2}$.
- $f(1\frac{1}{2}) = 2^{1\frac{1}{2}+1} + 2^{4-1\frac{1}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}} + 2^{2\frac{1}{2}} = 2 \times 2^{2\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}}$
  Hieruit volgt $a = 2^{3\frac{1}{2}}$.

Opgave 4c

- We mogen aannemen dat $p = x_P$ kleiner is dan x_Q, dus dat $x_Q = x_P + 4 = p + 4$.
  Op te lossen is dan: $f(p) = f(p + 4)$.
- Dit geeft $2^{p+1} + 2^{4-p} = 2^{p+5} + 2^{-p} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^p + 16 \cdot 2^{-p} = 32 \cdot 2^p + 2^{-p}$.
- De substitutie $z = 2^p$ geeft dan: $2z + \dfrac{16}{z} = 32z + \dfrac{1}{z} \Leftrightarrow 2z^2 + 16 = 32z^2 + 1$
- Dit geeft $30z^2 = 15 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{1}{2}} = 2^{-1/2} \vee z = -2^{-1/2}$
  Omdat $z = 2^p$ niet negatief kan zijn, geeft dit $2^p = 2^{-1/2} \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}$
- Nu volgt $f(p) = 2^{p+1} + 2^{4-p} = 2^{1/2} + 2^{4\frac{1}{2}} = 2^{1/2} + 2^4 \cdot 2^{1/2} = \sqrt{2} + 16 \cdot \sqrt{2} = 17\sqrt{2}$
  Dit geeft $a = 17\sqrt{2}$

Alternatief voor de berekening van p:

- $f(1\frac{1}{2} - \alpha) = 2^{2\frac{1}{2}-\alpha} + 2^{2\frac{1}{2}+\alpha} = 2^{2\frac{1}{2}+\alpha} + 2^{2\frac{1}{2}-\alpha} = f(1\frac{1}{2} + \alpha)$
  f is dus lijnsymmetrisch in de lijn $x = 1\frac{1}{2}$.
- De punten op de grafiek met een horizontale afstand van 4, liggen daarom op afstand 2 van de symmetrielijn.
- Dit geeft $p = x_P = 1\frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

Opgave 5a

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = -\sin(x)$
  $-\sin(x) = \sin(-x) = \cos(-x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x + \frac{1}{2}\pi)$
  Ook: $-\sin(x) = \sin(x + \pi) = \cos(x + \pi - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x + \frac{1}{2}\pi)$
  Dit geeft: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(x + \frac{1}{2}\pi)$
- $\cos(3x) = \cos(x + \frac{1}{2}\pi) \Leftrightarrow 3x = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = -x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- $3x = x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
- $3x = -x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 4x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

De vergelijking kan ook omgewerkt worden naar een sinusvergelijking, bijvoorbeeld:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\cos(3x)$
  $-\cos(3x) = \cos(3x + \pi) = \sin(3x + \pi + \frac{1}{2}\pi) = \sin(3x + \frac{3}{2}\pi)$
  Ook: $-\cos(3x) = -\sin(\frac{1}{2}\pi - 3x) = \sin\left(-(\frac{1}{2}\pi - 3x)\right) = \sin(3x - \frac{1}{2}\pi)$
  Dit geeft: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(3x + \frac{3}{2}\pi)$
- $\sin(x) = \sin(3x + \frac{3}{2}\pi) \Leftrightarrow x = 3x + \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \left(3x + \frac{3}{2}\pi\right) = -3x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- $x = 3x + \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
- $x = -3x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 4x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

Opgave 5b

- ⋆ Uit $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ volgt $f(x) = \cos(x) \Leftrightarrow 2\sin^2(x)\cos(x) = \cos(x)$
- ⋆ Dit geeft $\cos(x) = 0 \vee 2\sin^2(x) = 1$
- ⋆ $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
- ⋆ $2\sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- ⋆ $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
  $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$
  Deze series kunnen worden samengenomen tot $x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

Opgave 5c

- ⋆ $g'(x) = \cos(x) \cdot \sin(2x) + \sin(x) \cdot 2\cos(2x)$
- ⋆ $\ldots = \cos(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x) \cdot (2\cos^2(x) - 1) = 2\sin(x) \cdot \big(3\cos^2(x) - 1\big)$
- ⋆ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee 3\cos^2(x) - 1 = 0$
- ⋆ $\sin(x) = 0$ geeft $g(x) = 0$, dus de lijn $y = 0$ is een horizontale raaklijn.
- ⋆ $3\cos^2(x) = 1$ geeft $\cos^2(x) = \frac{1}{3}$.
  Hieruit volgt $\cos(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee \cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, maar ook $\sin^2(x) = \frac{2}{3}$.
  Aangezien g geschreven kan worden als
  $g(x) = \sin(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin^2(x)\cos(x)$, volgt nu $g(x) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$
  of $g(x) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$.
  De andere twee horizontale raaklijnen zijn dus $y = \frac{4}{9}\sqrt{3}$ en $y = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Alternatief:

- ⋆ Schrijf $g(x) = \sin(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin^2(x)\cos(x)$
- ⋆ Dit geeft
  $g'(x) = 2 \cdot 2\sin(x)\cos(x)\cos(x) + 2\sin^2(x) \cdot (-\sin(x)) = 4\sin(x)\cos^2(x) - 2\sin^3(x)$
- ⋆ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee 4\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 0$
- ⋆ $\sin(x) = 0$ geeft $g(x) = 0$, dus de lijn $y = 0$ is een horizontale raaklijn.
- ⋆ $4\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\sin^2(x) - 2\sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow 6\sin^2(x) - 4 = 0$
  $\Leftrightarrow \sin^2(x) = \frac{2}{3}$
- ⋆ Hieruit volgt $\cos^2(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee \cos(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.
  Dit geeft $g(x) = 2\sin^2(x)\cos(x) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$ of $g(x) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$.
  De andere twee horizontale raaklijnen zijn dus $y = \frac{4}{9}\sqrt{3}$ en $y = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$.