Pareto-krommen

In een fabriek worden printplaatjes voor mobiele telefoons geproduceerd. Alle printplaatjes worden gecontroleerd voordat ze de fabriek verlaten. Afgekeurde printplaatjes worden vernietigd. Bij de controle is een maand lang genoteerd wat de oorzaak is van het afkeuren, zie tabel 4. We gaan ervan uit dat andere maanden hetzelfde beeld vertonen.
In principe zijn al deze oorzaken te verhelpen door verbeteringen in het productieproces. Dat brengt wel de nodige kosten met zich mee. In tabel 4 is bij elke oorzaak aangegeven wat de maandelijkse kosten zijn om deze oorzaak te verhelpen.

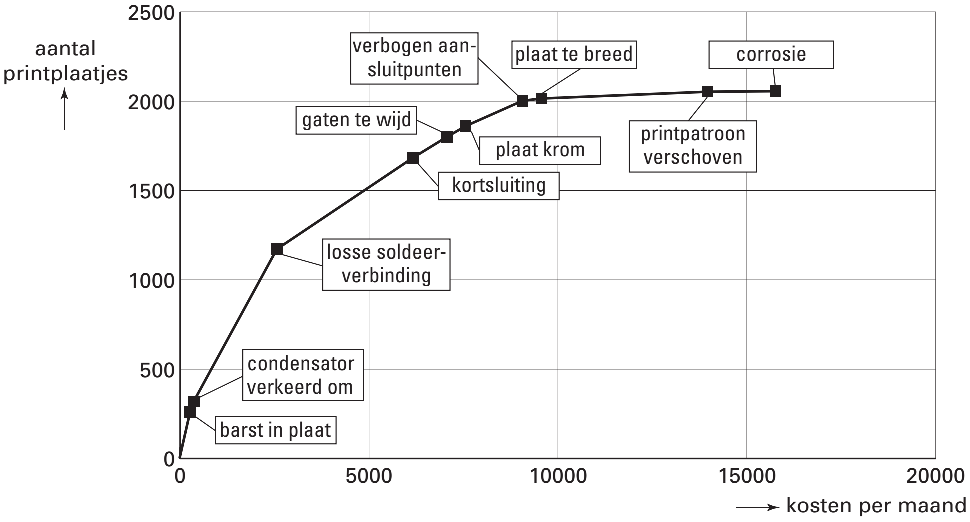
tabel 4

Onderzoek van afgekeurde printplaatjes gedurende de maand mei

oorzaak	aantal afgekeurde printplaatjes	kosten in euro per maand om oorzaak te verhelpen
losse soldeerverbinding	852	2200
kortsluiting	511	3600
barst in plaat	295	300
verbogen aansluitpunten	141	1500
gaten te wijd	117	900
plaat krom	61	500
printpatroon verschoven	38	4400
condensator verkeerd om	25	60
plaat te breed	13	500
corrosie	3	1800
totaal	2056	15 760

Door 15 760 euro per maand te investeren zou men alle 2056 afkeuringen kunnen voorkomen. Wanneer men slechts een deel van dit bedrag wil investeren, is het verstandig te beginnen met de oorzaak waarbij de vermindering van het aantal afkeuringen per geïnvesteerde euro het grootst is, vervolgens de oorzaak waarbij de vermindering van het aantal afkeuringen per geïnvesteerde euro het op één na grootst is, enzovoorts. In figuur 2 zijn de oorzaken op deze wijze geordend. Langs de horizontale as staan de cumulatieve kosten per maand om de oorzaken te verhelpen, langs de verticale as staat de cumulatieve vermindering van het aantal afkeuringen. Een dergelijke kromme heet een *Pareto-kromme*.

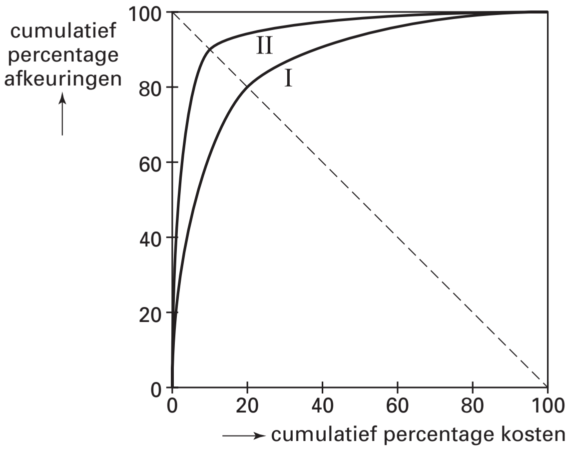
figuur 2



5 **1** ☐ Toon aan dat de volgorde van de oorzaken ‘kortsluiting’ en ‘gaten te wijd’ in figuur 2 in overeenstemming is met de gegevens in tabel 4.

Om Pareto-krommen bij verschillende productieprocessen te kunnen vergelijken, noteren we de kosten op de horizontale as als percentage van de totale kosten om álle afkeuringsoorzaken te verhelpen. En de aantallen afkeuringen op de verticale as noteren we als percentage van het totale aantal afkeuringen. In figuur 3 zijn enkele van zulke krommen getekend.

figuur 3



Kromme I gaat door het punt (20, 80). Dat betekent dat met 20% van de totale benodigde kosten 80% van de afkeuringen te voorkomen is. Deze kromme heet een (20, 80)-kromme. Kromme II is een (10, 90)-kromme.
Elke Pareto-kromme is op deze wijze aan te duiden als (a, b)-kromme met $a + b = 100$.

4p 2 □ Schets in de figuur op de uitwerkbijlage een (40, 60)-kromme.

In figuur 2 zijn geen percentages gebruikt. Toch kunnen we ook de grafiek in figuur 2 als (a, b)-kromme aanduiden, met $a + b = 100$. Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

4p 3 □ Welke aanduiding hoort bij de Pareto-kromme in figuur 2? Licht je antwoord toe.

Macht

Sinds 1 mei 2004 bestaat de Europese Unie uit 25 landen. In de Raad van Ministers heeft elk land één zetel. In deze raad worden veel beslissingen genomen. Daarbij heeft niet elk land evenveel stemmen. Zo heeft Frankrijk 29 stemmen, Nederland 13 stemmen en Denemarken 7 stemmen. Op deze wijze beschikken de 25 landen samen over 321 stemmen. Een land stemt óf voor óf tegen en kan zich dus niet van stemming onthouden of met een deel van zijn stemmen vóór en een ander deel tegen stemmen.
Vaak worden beslissingen genomen bij meerderheid van stemmen. Dat betekent dat een voorstel alleen wordt aangenomen als meer dan de helft van de stemmen voor dat voorstel is. Dan kan het gebeuren dat de stemmen van Nederland de doorslag geven bij het wel of niet aannemen van een voorstel. Dat is bijvoorbeeld het geval wanneer van de overige landen 152 stemmen voor zijn en 156 stemmen tegen.

3p 4 □ Bereken bij welke aantallen voorstemmen van de overige landen de stemmen van Nederland de doorslag geven om een meerderheid voor een voorstel te krijgen.

Bij een stemming kan dus één van de partijen soms de doorslag geven. Hoeveel invloed een partij bij de stemming heeft, geven we aan met de *machtsindex (mi)*.
Aan de hand van een voorbeeld laten we zien hoe je die kunt uitrekenen.
We gaan uit van drie partijen A, B en C. Partij A heeft 6 stemmen, partij B heeft 4 stemmen en partij C heeft 3 stemmen. Zij beslissen over een voorstel bij meerderheid van stemmen.
Eén van de mogelijkheden is de volgende: A stemt voor, B stemt voor en C stemt tegen.
Deze mogelijkheid noteren we met (V,V,T).

We gaan nu de machtsindex van één van deze partijen, partij *B*, berekenen. Daarvoor kijken we alleen naar de mogelijkheden waarbij deze partij voor stemt. Dat levert de volgende mogelijkheden op:

tabel 1

mogelijkheid I	(V,V,V)
mogelijkheid II	(V,V,T)
mogelijkheid III	(T,V,V)
mogelijkheid IV	(T,V,T)

Omdat de partijen samen 13 stemmen hebben, zijn er minstens 7 stemmen nodig voor een meerderheid. Bij de mogelijkheden I, II en III is er een meerderheid voor het voorstel.
Bij de mogelijkheden II en III zijn de 4 voorstemmen van *B* onmisbaar om een meerderheid te realiseren.
Bij mogelijkheid I zou die meerderheid ook behaald zijn als *B* niet voor zou stemmen.
Bij mogelijkheid IV is er geen meerderheid.
Omdat de stemmen van *B* bij 2 van de 4 mogelijkheden doorslaggevend zijn, zeggen we:

$$\textit{de machtsindex van B} = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

We gebruiken dus de volgende definitie van de machtsindex *(mi)* van een partij:

$$mi = \frac{\textit{aantal mogelijkheden waarbij de voorstemmen van die partij doorslaggevend zijn voor de meerderheid}}{\textit{totaal aantal mogelijkheden waarbij die partij voorstemt}}$$

Wanneer er sprake is van vier partijen, zijn er meer mogelijkheden. We nemen de volgende situatie: partij *A* heeft 7 stemmen, partij *B* heeft 4 stemmen, partij *C* heeft 4 stemmen en partij *D* heeft 2 stemmen.
Ook nu beslissen de partijen bij meerderheid van stemmen.

6p 5 □ Bereken de machtsindex van *A* in deze nieuwe situatie.

De verdeling van de stemmen kan tot vreemde situaties leiden wanneer er één partij is met weinig stemmen.
Er zijn 3 partijen. Partij *A* heeft 6 stemmen, partij *B* 4 stemmen en partij *C* slechts 1 stem.
De partijen *B* en *C* stellen nu een nieuwe verdeling voor waarbij *A* en *B* elk 5 stemmen hebben en *C* nog steeds 1 stem. Het aantal stemmen van *C* is dan weliswaar niet groter geworden, maar de machtsverhoudingen zijn wel veranderd.

6p 6 □ Toon dit aan door in beide situaties de machtsindex van elk van de drie partijen te berekenen.

We nemen nu een situatie met vijf partijen *A, B*, *C*, *D* en *E*.
Partij *A* heeft 3 stemmen en de overige partijen hebben elk 1 stem.

6p 7 □ Onderzoek of de machtsindex van *A* meer dan drie maal zo groot is als de machtsindex van *B*.

Restzetels

Op 2 maart 1994 vonden er in Nederland gemeenteraadsverkiezingen plaats. In de gemeente Enschede werden 67 787 stemmen uitgebracht. De verkiezingsuitslag is weergegeven in tabel 1. In de tweede kolom is af te lezen hoeveel stemmen elke partij heeft behaald. In de laatste kolom van deze tabel staat aangegeven hoe, op basis van de verkiezingsuitslag, de zetelverdeling in de gemeenteraad van Enschede uiteindelijk is geworden.
Het proces om stemmen om te rekenen naar aantallen zetels is ingewikkeld. We gaan daar verderop in deze opgave nader op in. Eerst kijken we alleen naar het resultaat van de zetelverdeling.

tabel 1

partij	**aantal stemmen**	**aantal volle zetels**	**aantal zetels in de gemeenteraad**
1. PvdA	15 329	8	10
2. CDA	12 584	7	8
3. VVD	9080	5	5
4. D66	8751	5	5
5. GroenLinks	5150	2	3
6. GPV	3399	1	2
7. CD	2730	1	1
8. SP	1549	0	1
9. NCPN	589	0	0
10. van Loenen	2955	1	1
11. Enschede Nu	5671	3	3
totaal aantal uitgebrachte stemmen:	67 787	totaal aantal zetels:	39

Uit de tabel volgt dat PvdA, VVD en D66 samen een meerderheid kregen van de zetels in de gemeenteraad. Toch hadden deze drie partijen samen geen meerderheid van de stemmen.

4p 8 Laat met behulp van de gegevens in de tabel zien dat PvdA, VVD en D66 samen inderdaad een meerderheid aan zetels maar niet een meerderheid aan stemmen hebben behaald.

Om te bepalen op hoeveel zetels partijen recht hebben, wordt eerst de **kiesdeler** bepaald. De kiesdeler wordt berekend door het totaal aantal uitgebrachte stemmen te delen door het aantal beschikbare zetels in de gemeenteraad.

3p 9 Bereken de kiesdeler voor de verkiezingsuitslag van Enschede in 1994. Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

Om het aantal zetels te bepalen waar een partij recht op heeft, wordt vervolgens bij elke partij het aantal op die partij uitgebrachte stemmen gedeeld door de kiesdeler. Voor bijvoorbeeld de PvdA is de uitkomst hiervan ongeveer 8,82; daarom heeft de PvdA 8 **volle zetels**. In de derde kolom van tabel 1 staat het

aantal volle zetels van elke partij.
De beschikbare zetels in de gemeenteraad die nog niet zijn verdeeld met de volle zetels heten de **restzetels**. Voor de verdeling van de restzetels moet volgens de kieswet het systeem van de **grootste gemiddelden** worden gehanteerd. In de kieswet staat dit systeem als volgt beschreven:

fragment uit de Kieswet

> Bij de verdeling van de restzetels volgens het systeem van de grootste gemiddelden wordt voor elke partij in gedachten één zetel opgeteld bij het behaalde aantal volle zetels. Vervolgens wordt het aantal op de partij uitgebrachte stemmen gedeeld door dit denkbeeldige aantal zetels. Op deze wijze wordt voor elke partij het gemiddelde aantal stemmen per zetel bepaald. De partij met het grootste gemiddelde krijgt een restzetel toebedeeld.
> Aldus ontstaat een nieuwe tussenstand bij de zetelverdeling. Zolang er nog restzetels te verdelen zijn, wordt de hierboven beschreven procedure herhaald. Uitgaande van de nieuwe tussenstand wordt dan wederom in gedachten bij elke partij één zetel opgeteld bij het (in de tussenstand) behaalde aantal zetels. Wederom wordt de volgende restzetel toebedeeld aan de partij met het grootste gemiddelde aantal stemmen per zetel.
> De systematiek voor de restzetelverdeling kan er toe leiden dat een partij meer dan één restzetel behaalt.

5p 10 Laat met berekeningen zien dat de eerste restzetel werd toegewezen aan GroenLinks.

De laatste restzetel werd toebedeeld aan de PvdA. Daaruit kun je concluderen dat de PvdA bij de verdeling van de laatste restzetel (dus bij de laatste tussenstand) 9 zetels had en de VVD 5 zetels. De berekening van de gemiddelde aantallen stemmen per zetel laat zien waarom de laatste restzetel naar de PvdA gaat en niet naar de VVD: $\frac{15329}{10} > \frac{9080}{6}$.

Veronderstel nu eens dat een aantal mensen niet op de PvdA maar op de VVD gestemd zou hebben. Als dat aantal voldoende groot is, zou de VVD de laatste restzetel hebben gekregen.

5p 11 Bereken hoe groot het bedoelde aantal ten minste moet zijn.