Wiskunde oefentoets hoofdstuk 9: Exponentiële en logaritmische functies

Iedere antwoord dient gemotiveerd te worden, anders worden er geen punten toegekend. Gebruik van grafische rekenmachine is toegestaan. Succes!

Helderheid van sterren (examen 2015 - tijdvak I)

Aan de sterrenhemel bevinden zich heldere en minder heldere sterren. De **helderheid** van een ster werd in de oudheid reeds aangegeven met een getal, de **magnitude** van de ster. Zeer heldere sterren kregen magnitude 1. Nauwelijks zichtbare sterren kregen magnitude 6. Een kleine waarde betekent dus een grote helderheid. In deze opgave is m de magnitude.

Tegenwoordig meet men de hoeveelheid licht die van een ster wordt ontvangen. De helderheid van een ster wordt dan vaak uitgedrukt in **lux** (een eenheid voor verlichtingssterkte). In deze opgave is L de helderheid in lux.

In de tabel staan voor een aantal helderheden de waarden van m en L.

m	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
L	$1{,}0\cdot10^{-6}$	$4{,}0\cdot10^{-7}$	$1{,}6\cdot10^{-7}$	$6{,}3\cdot10^{-8}$	$2{,}5\cdot10^{-8}$	$1{,}0\cdot10^{-8}$

Tussen L en m bestaat een exponentieel verband van de vorm $L = 10^{p+qm}$.

4pt 1. Leid uit de tabelgegevens bij m =1,0 en m = 6,0 af dat $p = -5{,}6$ en $q = -0{,}4$.

Voor L geldt dus: $L = 10^{-5{,}6-0{,}4m}$. In het sterrenbeeld Steenbok bevindt zich een optische dubbelster: twee sterren die met het blote oog als één object worden waargenomen. Na meting blijkt dat voor de ene ster geldt $m = 4{,}30$ en voor de andere ster $m = 3{,}58$. De waarde van L van de optische dubbelster is de som van de L-waarden van de afzonderlijke sterren.

4pt 2. Bereken de magnitude van de optische dubbelster. Rond je antwoord af op één decimaal.

L is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand x (in meters) van de ster tot de aarde: $L = \frac{C}{x^2}$, waarbij C een constante is. Er geldt het volgende verband:

$$m(x) = -14{,}0 - 2{,}5log(C) + 5{,}0log(x)$$

4pt 3. Bewijs dit.

Momenteel is de afstand x van de ster Aldebaran tot de aarde $6{,}3 \cdot 10^{17}$ meter. Deze afstand neemt toe met $1{,}7 \cdot 10^{12}$ meter per jaar, dus $\frac{dx}{dt} = 1{,}7 \cdot 10^{12}$ m/j. Door deze verwijdering verandert ook de helderheid van de ster en dus ook de magnitude m.
De snelheid waarmee m verandert kan worden berekend met de afgeleide van m als functie van de tijd t (in jaren). Voor deze afgeleide $\frac{dm}{dt}$ geldt:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

3pt 4. Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee de magnitude m van Aldebaran op dit moment verandert.

Standaardvorm

Gegeven is een exponentieel verband tussen N, het aantal konijnen op een weide en t de tijd in decennia (tien jaren): $N = b \cdot g^{at+c}$.

3pt 5. Maak t vrij in dit verband.

Neem nu: $a = 2$, $c = -5$, $b = 54$ en $g = 3$.

3pt 6. Bereken algebraïsch voor welke t geldt: $N \leq 2$.

2pt 7. Bereken in hoeveel maanden de konijnen zich verdubbelen.

5pt 8. Bereken met behulp van differentiëren op welk tijdstip t de snelheid waarmee de konijnen zich vermeerderen gelijk is aan 40 per jaar.

Algebraïsch oplossen

Los de volgende vergelijkingen of ongelijkheden algebraïsch op.

4pt 9. ${}^{3}\log(2x-4)-2=\frac{1}{2}$.

4pt 10. $\ln(|2x-2|)>e$.

4pt 11. ${}^{2}\log(x)={}^{4}\log(x+6)$

Raaklijnen

Gegeven zijn de functie: $f(x)={}^{2}\log(x)$ en $g(x)=e^{3x}-a$. Op ieder punt S, met $x_S>0$, kunnen de raaklijnen van f en g bepaald worden.

5pt 12. Bepaal voor welke a de raaklijnen van f en g exact dezelfde lijn zijn.

Bepaal e zelf

De heer Euler heeft het getal e gevonden. Dit getal is het grondtal voor de exponentiële functie g^x die als afgeleide zichzelf heeft. Voor e geldt:

$$e=\lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

4pt 13. Toon dit aan.

EINDE — Harm van Deursen — 2016