Uitwerking en ondernormering voorbeeldexamen wiskunde B

Opgave 1

a De afgeleide van $f_2(x) = x - 2\sqrt{x-1}$ is $f_2'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 3

$f_2'(x) = 0$ oplossen geeft $x = 2$ 1

Voor $x = 2$ heeft f_2 het minimum $f_2(2) = 0$ 1

b $f_2(x) = g(x)$ oplossen: $x - 2\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow -2\sqrt{x-1} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Vermenigvuldigen met – 2 geeft $4\sqrt{x-1} = x - 1$ 1

Kwadrateren: $16(x-1) = (x-1)^2$ uitwerken tot $x^2 - 18x + 17 = 0$ 2

Oplossingen: $x = 1$ of $x = 17$, snijpunten (1, 1) en (17, 9) 1

c De oppervlakte is $\int_1^{17}(g(x) - f_2(x))dx$. Wordt $\int_1^{17}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 2\sqrt{x-1}\right)dx$ 1

= $\left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\right]_1^{17}$ 2

= $\frac{64}{3}$ 1

d Afgeleide nemen: $f_p'(x) = 1 - \frac{p}{2\sqrt{x-1}}$ 2

Als er een minimum is voor $x = 5$ dan moet $f_p'(5) = 0$ 1

Dus $1 - \frac{p}{2\sqrt{5-1}} = 0$ dus $1 - \frac{p}{4} = 0$ geeft $p = 4$ 2

Opgave 2

a $\angle ADB$ is buitenhoek van ΔBDE dus $\angle ADB = \angle DBE + \angle AEB$ (buitenhoekstelling) 2

Maar $\angle DBE = \angle DAC$ (constante hoek) 1

Dus $\angle ADB = \angle DAC + \angle AEB$ 1

b $\angle ADB = \angle ACB$ en $\angle DAC = \angle DBC$ (constante hoek)

Dus $\Delta ASD \sim \Delta BSC$ (hh) 2

Hieruit volgt: $\frac{AS}{BS} = \frac{SD}{SC}$ 2

Invullen: $\frac{8}{10} = \frac{SD}{2}$ dus $SD = 1{,}6$ 1

c $ABCD$ is een koordenvierhoek dus $\angle ABC + \angle ADC = 180°$ (koordenvierhoekstelling)

Ook is $\angle ADC + \angle CDE = 180°$ zodat $\angle ABC = \angle CDE$ 3

De driehoeken hebben $\angle AEB$ gemeenschappelijk dus $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (hh) 2

Opgave 3

a $f'(x) = \frac{(1+e^x).\ 2e^x - 2e^x.e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ 2

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^x = 0$ heeft geen oplossingen dus heeft f geen extreme waarden 2

b $f''(x) = \frac{(1+e^x)^2.2e^x - 2e^x.2(1+e^x).e^x}{(1+e^x)^4}$ 2

Vereenvoudigen tot $\frac{(1+e^x).2e^x - 2e^x.2e^x}{(1+e^x)^3}$ 2

Teller uitwerken geeft $\frac{2e^x - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3}$ 1

Vervolg opgave 3

c $f''(x) = 0$ als $2e^x - 2e^{2x} = 0 \Rightarrow 2e^x(1 - e^x) = 0$ geeft $x = 0$ 1

Het buigpunt is het punt (0, 1) 1

De helling van de buigraaklijn is $f'(0) = \frac{1}{2}$ 1

De vergelijking van de buigraaklijn is $y = \frac{1}{2}x + 1$ 1

d De inhoud is $\int_0^2 \pi \left(\frac{2e^x}{1+e^x}\right)^2 dx - \int_0^2 \pi 1^2\, dx$ 2

Grafiek van $Y_1 = \pi\left(\frac{2e^x}{1+e^x}\right)^2$ laten tekenen in de GR, dan naar CALC-menu optie 7 1

Antwoord: 13,23 - 2π = 6,9 1

Opgave 4

a $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x(\ln x - 2) = 0$ 2

Dus $\ln x = 0$ of $\ln x = 2 \Rightarrow x = 1$ of $x = e^2$ 2

b $f'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}$ 3

$f'(x) = 0$ als $\ln x = 1$ dus $x = e$ 2

Het minimum is $f(e) = 1 - 2 = -1$ 1

c De oppervlakte is $\int_1^{e^2}\left(g(x) - f(x)\right)dx = \int_1^{e^2} 2\ln x\ dx$ 2

= $[2(x\ln x - x]_1^{e^2} = 2e^2 + 2$ 2

d $g'(x) = \frac{2\ln x}{x}$ dus $g''(x) = \frac{2-2\ln x}{x^2}$ 2

$g''(x) = 0$ als $x = e$ dus het buigpunt is (e , 1) 2

Opgave 5

a $\cos 2x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ 2

Dus $2x = \frac{1}{2}\pi - x + k.2\pi$ of $2x = -\frac{1}{2}\pi + x + k.2\pi$ 2

$x = \frac{1}{6}\pi + k.\frac{2}{3}\pi$ of $x = -\frac{1}{2}\pi + k.2\pi$ dus $x = \frac{1}{6}\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$ 1

b $f'(x) = -2\sin 2x - \cos x$ 1

Dit is te schrijven als $-4\sin x\ \cos x - \cos x = \cos x\ (-4\sin - 1)$ 2

Dus $f'(x) = 0$ als $\cos x = 0$ of $\sin x = -\frac{1}{4}$ 1

Als $\cos x = 0$ dan heeft f beide keren een minimum.

Als $\sin x = -\frac{1}{4}$ dan heeft f beide keren een maximum 1

Dan is $f(x) = 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$ 1

c $y'(t) = 0$ als $\cos t = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$ 2

Voor deze waarden van t is ook $x'(t) = 0$ (zie opgave b) 1

Dus voor geen enkele waarde van t is de raaklijn horizontaal. 1

d De kromme gaat door *A* als $t = 0$ en door *B* als $t = \frac{1}{6}\pi$ 1

De lengte is $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sqrt{(-2\sin 2t - \cos t)^2 + (2\cos t)^2}\, dt$ 1

Grafiek van $Y_1 = \sqrt{(-2\sin 2x - \cos x)^2 + (2\cos x)^2}$ laten tekenen in de GR, dan naar CALC-menu optie 7 1

Antwoord: 1,43 1